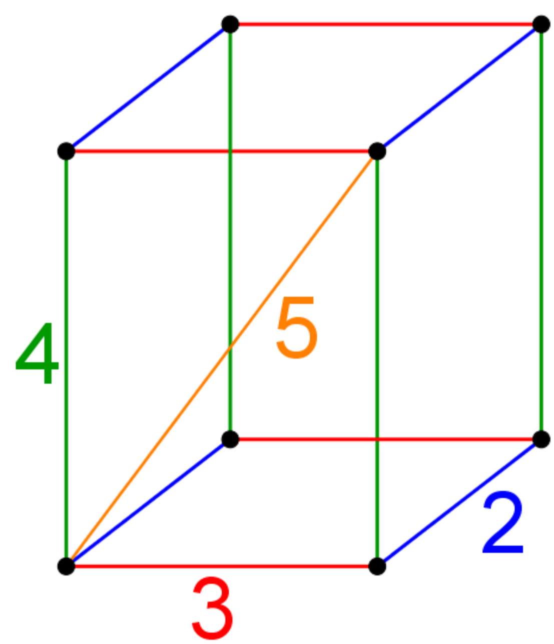
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

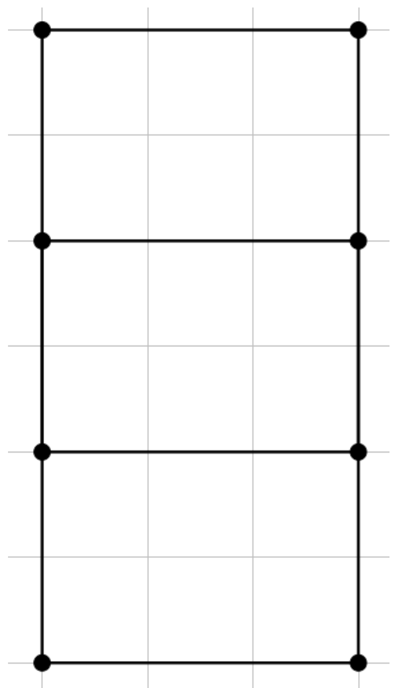
שלב הגמר, שנת תשפ"ג

1. סמנו במישור 8 נקודות כך שלכל נקודה יהיו 4 נקודות שנמצאות במרחקים 2,3,4,5 מהנקודה.

פתרון: נבנה מלבן עם אורכי צלעות 3,4. אורך האלכסון במלבן זה הוא 5. כרגע יש לנו 4 נקודות ולכל נקודה יש 3 נקודות שנמצאות במרחקים 3,4,5. נבנה העתק נוסף של המלבן שלנו ונזיז אותו במרחק 2 בכיוון שרירותי (ראה איור ימני), יתקבל המבנה המבוקש בשאלה.

הערה: ניתן לבנות את שני המלבנים כך שכל 8 הנקודות יהיו על קודקודים של דף משבצות (ראה איור שמאלי)





2. מהו הראשוני המינימלי $p > 10$ עבורו המספר

$$|105 - 2p|$$

פריק?

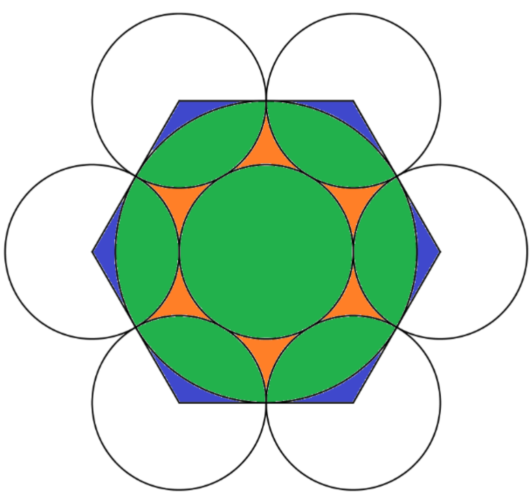
פתרון: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ כיוון ש-p ראשוני וגדול מ-10 הוא לא מתחלק ב-3,5,7 ולכן $105 - 2p$ לא מתחלק ב-3,5,7. בנוסף ברור ש-$105 - 2p$ אי-זוגי.
בכדי ש-$|105 - 2p|$ יהיה מספר פריק הוא חייב או להתחלק לפחות בשני ראשוניים שונים או להתחלק בריבוע של ראשוני מסוים. הראשוני הקטן ביותר ש-$105 - 2p$ יכול להתחלק בו הוא 11 ולכן הערך הפריק המינימלי של $|105 - 2p|$ הוא $11^2 = 121$. ברור ש-$121 > 105 - 2p$ ולכן זו לא אפשרות אבל יתכן ש-$2p - 105 = 121$ ואז $p = 113$ וזה אכן ראשוני.

3. בכיכר מעגלית ממוקמים דוכנים של 100 סוחרים שלכל אחד מהם כמות מסוימת של מטבעות. כל סוחר מוכר דגים במחיר קבוע משלו. לכל סוחר יש אספקה בלתי מוגבלת של דגים. ביום הראשון הסוחר הראשון הולך לדוכן של הסוחר הבא במעגל וקונה ממנו כמה שיותר דגים לפי הכסף שיש לו. בכל יום הבא הסוחר שניסו לקנות ממנו דגים אתמול מנסה היום לקנות דגים מהסוחר הבא במעגל. אם הסוחר לא מצליח לקנות דגים בכלל ביום כלשהו, יום זה יקרא יום עצוב.

הוכיחו שאם היום ה-2022 הוא יום עצוב אז גם היום ה-2023 יהיה יום עצוב.

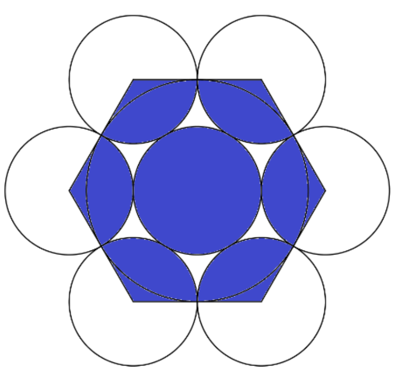
פתרון: נמספר את הסוחרים: הסוחר הראשון הוא הסוחר שקונה דגים ביום הראשון, הסוחר השני קונה דגים ביום השני וכך הלאה. נניח שהיום ה-2022 הוא יום עצוב. נשים לב שאחרי היום ה-1923 לסוחר ה-23 יש פחות כסף מהכמות שהוא צריך בשביל לקנות דג (כי אחרת הוא היה קונה עוד דג), וכמות הכסף שלו לא משתנה עד היום ה-2022. כמות הכסף שלו לא משתנה גם ביום ה-2022, כי הנחנו שהיום ה-2022 הוא יום עצוב, ולכן כמות הכסף שיש לו ביום ה-2023 שווה לכמות הכסף שיש לו ביום ה-1923, שקטנה מהמחיר שהוא צריך לשלם בשביל דג. לכן, הוא לא יוכל לקנות דגים ביום ה-2023 ולכן זהו גם יום עצוב.

4. בציור רואים 7 מעגלים בגודל זהה המשיקים זה לזה, משושה שנוצר כאשר מחברים מרכזים של שישה מהם, ומעגל גדול שחסום במשושה זה.
הוכיחו שהשטח הכחול שווה לשטח הכתום.



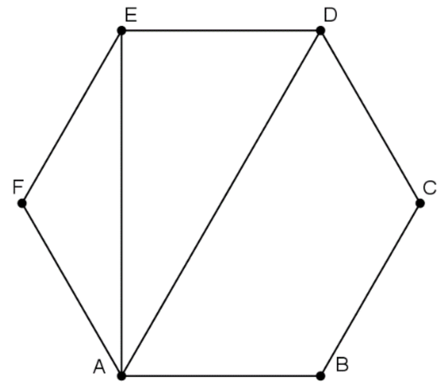
פתרון: נקרא לשבעת המעגלים בשאלה מעגלים קטנים ולמעגל החסום במשושה נקרא המעגל הגדול.
נוסיף לשני השטחים שאנו רוצים להשוות את השטח הירוק.

השטח הכחול החדש מורכב משלושה מעגלים קטנים, הרי המרכזים של ששת המעגלים החיצוניים יוצרים משושה משוכלל שזוויותיו שוות ל-$120°$ ולכן בכל קודקוד של המשושה נמצא שליש של מעגל קטן ויחד עם המעגל במרכז מתקבלים שלושה מעגלים קטנים.



לאומת זאת לאחר הוספת השטח הירוק השטח הכתום הופך להיות השטח של המעגל הגדול. בשביל לפתור את השאלה עלינו להוכיח כי היחס בין שטח המעגל הקטן לשטח המעגל הגדול הוא 1 ל-3. לשם כך נחשב את היחס בין הקטרים של המעגלים.

קוטר של מעגל קטן שווה לצלע של המשושה המשוכלל ואילו קוטרו של המעגל הגדול שווה לגובה של המשושה המשוכלל.



במשושה משוכלל $ABCDEF$ המשולש ADE הוא משולש $30-60-90$ והיחס בין הניצבים במשולש זה הוא 1 ל-$\sqrt{3}$ ולכן היחס בין קוטר המעגל הקטן לקוטר המעגל הגדול הוא 1 ל-$\sqrt{3}$ כלומר היחס בין השטחים שלהם הוא 1 ל-3, כנדרש.

5. במתנ"ס מועברים N חוגים. בכל חוג משתתפים מספר תלמידים, ידוע שאין שני תלמידים המשתתפים בדיוק באותם החוגים ושכל תלמיד משתתף בחוג אחד לפחות. שני תלמידים יקראו חברים אם הם הולכים לחוג משותף. ידוע שאם תלמיד א' חבר של תלמיד ב' ותלמיד ב' חבר של תלמיד ג' אז תלמיד א' חבר של תלמיד ג'.

כתלות ב-N, מה היא כמות התלמידים הגדולה ביותר שיכולה ללמוד במתנ"ס?

<u>תשובה:</u> הכמות הגדולה ביותר של תלמידים שיכולה ללמוד במתנ"ס היא 2^{N-1}.

<u>פתרון:</u> נקרא לשני תלמידים *אויבים* אם לכל חוג בדיוק אחד מהם הולך והשני לא.

אם היינו מתעלמים מהנתון על החברויות אז במתנ"ס היו יכולים להיות עד 2^N תלמידים, כיוון שכל תלמיד, לכל אחד מ-N החוגים בוחר אם הוא רוצה ללכת או לא (כרגע אנחנו מאפשרים אפילו תלמיד שלא הולך לאף חוג).

נחלק את 2^N התלמידים הפוטנציאליים לזוגות של אויבים, אם במתנ"ס אין שני אויבים אז ברור שכמות התלמידים הגדולה ביותר שיכולה להיות היא 2^{N-1}.

אחרת יש שני אויבים במתנ"ס, נקרא להם הארי ודראקו ונסמן את מספר החוגים שהארי הולך אליהם ב-X, דראקו כמובן הולך ל-$N-X$ חוגים.

נשים לב שאם תלמיד א חבר של הארי אז לא יתכן שהוא חבר גם של דראקו כיוון שהארי ודראקו אינם חברים. באופן דומה כל חבר של דראקו אינו חבר של הארי.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'
שלב הגמר, שנת תשפ"ג

ברור שכמות התלמידים המרבית שיכולים להשתתף בחלק מתוך X חוגים היא 2^X (כולל התלמיד שלא הולך לאף אחד מהחוגים) וכמות התלמידים המרבית שיכולים להשתתף בחלק מ-$N-X$ חוגים היא 2^{N-X} (שוב כולל התלמיד שלא הולך לאף אחד מהחוגים). ספרנו את התלמיד שלא הולך לאף חוג פעמיים אבל על פי נתוני השאלה אין תלמיד כזה ולכן במקרה זה יש לכל היותר $2^X+2^{N-X}-2$ תלמידים במתנ"ס שזה כמובן לא עולה על 2^{N-1} (כי $X\geq 1$).

נשאר להראות דוגמה בה יש בדיוק 2^{N-1} תלמידים במתנ"ס.

נקרא לאחד החוגים במתנ"ס חוג מתמטיקה. נגיד שכל התלמידים במתנ"ס משתתפים בחוג מתמטיקה אז כל התלמידים במתנ"ס חברים ולכן תנאי השאלה מתקיימים. במצב זה כל אחד מהתלמידים יכול לבחור אם ללכת או לא ללכת ל-$N-1$ החוגים האחרים, זה $N-1$ בחירות של כן או לא ולכן יש בדיוק 2^{N-1} תלמידים.

6. מצאו את כל הפתרונות במספרים חיוביים עבור המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x^2+xy=z \\ y^2+yz=x \\ z^2+zx=y \end{cases}$$

<u>פתרון ראשון:</u> נכפיל את שלושת המשוואות ונקבל ש-

$$xyz(x+y)(y+z)(x+z)=xyz$$

x,y,z חיוביים ולכן ניתן לחלק ב-xyz ונקבל

$$(x+y)(y+z)(x+z)=1$$

אם $x+y=y+z=x+z=1$ אז $x=y=z=\frac{1}{2}$ וזה אכן פתרון של המערכת.

אחרת נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$x+y>1$ ולכן מהמשוואה הראשונה נובע ש-

$$z=x(x+y)>x$$

ולכן $z+y>x+y>1$. כעט מהמשוואה השנייה נוכל להסיק ש-

$$x=y(y+z)>y$$

ולכן $x+z>y+z>1$ ומהמשוואה השלישית נקבל ש-

$$y=z(x+z)>z$$

סך הכל קיבלנו ש-$z>x>y>z$, סתירה.

פתרון שני: נחסר את המשוואה השנייה מהמשוואה הראשונה ונקבל ש-

$$(x-y)(x+z)=(z-x)(y+1)$$

באופן דומה נקבל את המשוואות:

$$(y-z)(y+z)=(x-y)(z+1)$$

$$(z-x)(z+x)=(y-z)(x+1)$$

נכפיל את שלושת המשוואות ונקבל ש-

$$(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)=(x-y)(y-z)(z-x)(x+1)(y+1)(z+1)$$

אם x,y,z שונים בזוגות אז ניתן לחלק את המשוואה האחרונה ב-$(x-y)(y-z)(z-x)$ ונשאר עם

$$(*)\quad (x+y)(y+z)(z+x)=(x+1)(y+1)(z+1)$$

נשכתב את המערכת המקורית באופן הבא:

$$\begin{cases} x(x+y)=z \\ y(y+z)=x \\ z(z+x)=y \end{cases}$$

נכפיל את שלושת המשוואות ונחלק את שני הביטויים המתקבלים ב-xyz (המשתנים חיוביים ולכן מותר לחלק בהם) ונקבל את המשוואה

$$(x+y)(y+z)(z+x)=1$$

מהמשוואה האחרונה ומ-$(*)$ נובע ש-

$$(x+1)(y+1)(z+1)=1$$

אבל $x,y,z>0$ ולכן במשוואה האחרונה אגף שמאל גדול מאחד, סתירה.

נסיק שמבין x,y,z יש שני מספרים שווים. בלי הגבל הכלליות נניח ש-$x=y$. המערכת המקורית הופכת ל-

$$\begin{cases} 2x^2=z \\ x^2+xz=x \\ z^2+zx=x \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה והשלישית נובע ש-

$$x^2 + xz = z^2 + xz$$

ולכן $x = z$ ונשאר רק לציין שמהמשוואה הראשונה נובע ש-$2x^2 = x$ ולכן $x = y = z = \frac{1}{2}$.

7. במשולש שווה צלעות ABC הנקודה D נמצאת על הקטע AB כך ש-$AD = \sqrt{3}BD$ והנקודה E נמצאת על הקטע AC כך ש-$2AE = \sqrt{3}CE$. הישר DE חותך את המשך הצלע BC בנקודה F.

חשבו את גודל הזווית $\angle DFB$ במעלות.

<u>פתרון:</u> נניח ש-$AB = 1$. נסמן את אמצע הקטע CE ב-M. נשים לב ש-

$$\frac{ME}{EA} = \frac{CE}{2EA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BD}{AD}$$

ולכן $BM||DE$. במשולש ECF הקטע BM עובר באמצע הצלע CE ומקביל לצלע EF ולכן זהו קטע אמצעים, כלומר B זו אמצע הצלע CF.

כעט נתבונן במשולש ACF, מתקיים ש-$AB = BC = BF$, כלומר AB הוא תיכון לצלע CF ושווה למחצית מאורכה, לפיכך המשולש חייב להיות ישר זווית-$\angle A = 90°$. בנוסף $CF = 2$ ו-$AC = 1$ ולכן $\angle AFC = 30°$.

ממשפט פיטגורס נובע ש-

$$AF = \sqrt{CF^2 - AC^2} = \sqrt{3}$$

נשאר לשים לב ש-

$$\frac{CE}{AE} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{CF}{AF}$$

ולכן FE הוא חוצה הזווית של $\angle AFC$ ולפיכך נסיק ש-$\angle EFC = 15°$.