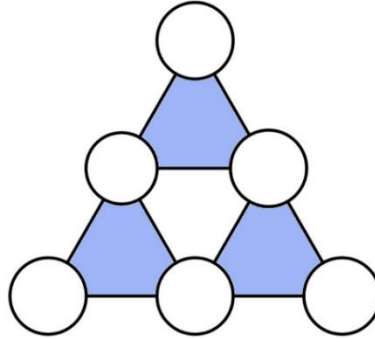


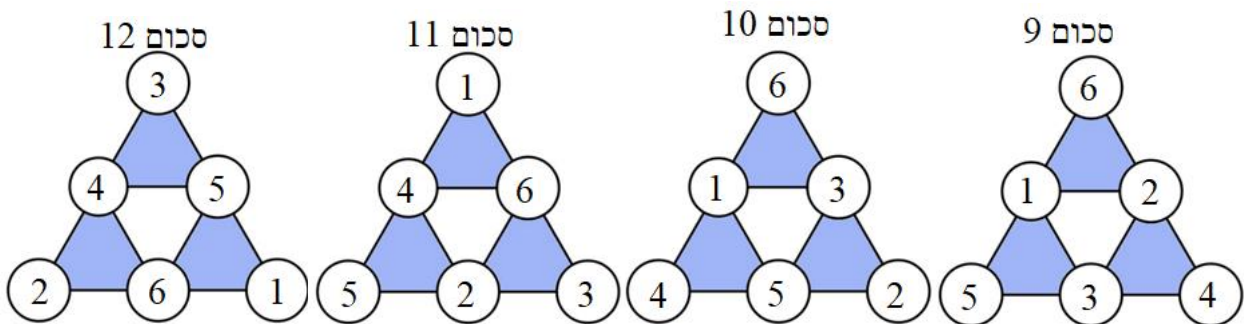


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ג

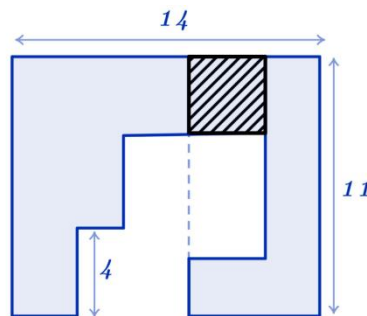
1. הציבו את המספרים 1,2,3,4,5,6 בתוך העיגולים, כל מספר פעם אחת בדיוק, כך שהסכומים בשלושת המשולשים הכחולים יהיו שווים.



פתרון: ישנן מספר דרכים להציב את המספרים, להלן חלק מהן:



2. כל הפינות בתמונה ישרות. בנוסף המרובע השחור הינו ריבוע. מצאו את היקף הצורה הכחולה.



פתרון:

3. במחסן היו שישה שקים עם סוכריות שוקולד ששקלו 1,2,3,4,5,6 קילוגרמים ועל כל שק רשום המשקל שלו. יום אחד איתי פתח שק אחד ואולי אכל ממנו מספר סוכריות. כיצד באמצעות שתי שקילות על מאזני כף לגלות מאיזה שק איתי אכל?
הערה: יתכן שאיתי אכל מספר לא שלם של קילוגרמים של סוכריות ויתכן גם שלא אכל סוכריות כלל.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ג

פתרון: בשקילה הראשונה נשקול את 1,2,3 מול 6.

- אם יתקבל שוויון נדע שאיתי לא אכל משקים אלו ונשאר עם 4,5 בתור החשודים. נשקול את 1,4 מול 5. אם יתקבל שוויון נדע שאיתי לא אכל סוכריות. אם 5 יהיה יותר קל נדע שאכל מ-5 ואם הצד של 1,4 יהיה יותר קל נדע שאכל מ-4.
- אם הצד של 6 יהיה יותר קל נדע שאיתי אכל סוכריות משק זה.
- אם הצד של 1,2,3 יצא קל יותר נשקול את 1,5 מול 2,4. אם יתקבל שוויון נדע שאיתי אכל מ-3, אם 1,5 יותר קל אז אכל מ-1 ואם 2,4 יותר קל אז אכל מ-2.

4. אסף, בר, גיורא ודרור - אחים, וכולם תושבים בארץ השקרנים ודוברי אמת.

שקרנים תמיד משקרים ודוברי אמת תמיד אומרים את האמת.

יום אחד אסף אמר: "מבין ארבעתנו, לפחות שניים - שקרנים"

ואז בר אמרה: "לפחות שלושה מאתנו שקרנים"

כמה שקרנים יש בין ארבעת האחים?

פתרון: נשים לב שאם בר צדקה אז גם אסף צדק ולכן מבין האחים יש לפחות שני דוברי אמת (אסף ובר), בסתירה לאמירה של בר.

נסיק שבר שיקרה. אם גם אסף שיקר אז בר ואסף שקרנים ולכן יש לפחות שני שקרים בסתירה להנחה שאסף שיקר.

סך הכל קיבלנו שאסף אמר את האמת ובר שיקרה ולכן יש לפחות שני שקרנים אבל פחות מ-3 ולכן יש בדיוק שני שקרנים.

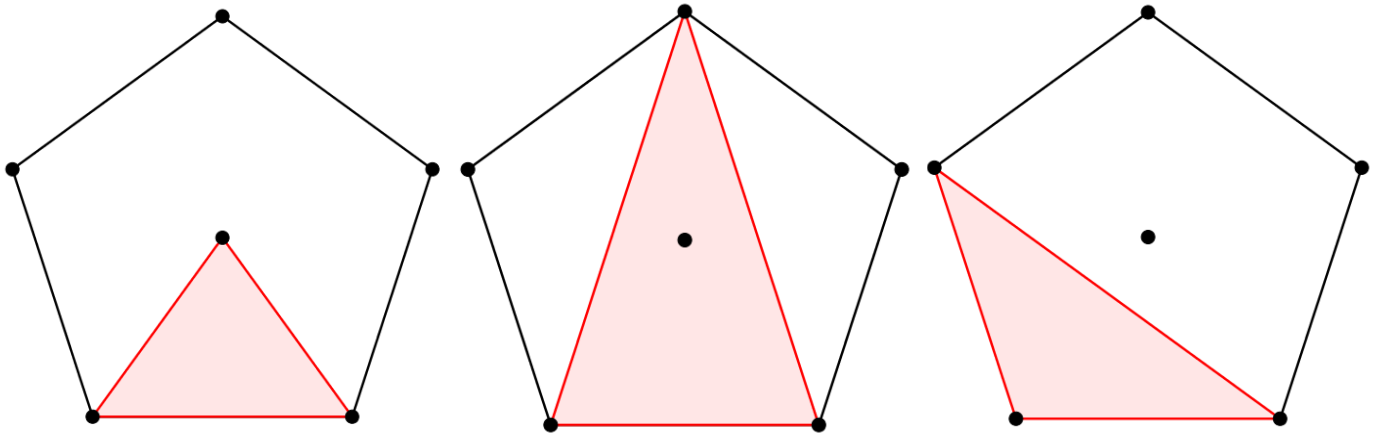
5. נגיד שמשולש הוא שווה שוקיים, אם יש לו לפחות שתי צלעות ששוות באורכן. סמנו 6 נקודות במישור כך שכל 3 מהן יוצרות משולש שווה-שוקיים. הסבירו את הבנייה.

פתרון: מחומש משוכלל ומרכזו מספקים את הבנייה הרצויה.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'
שלב הגמר, שנת תשפ"ג

נוצרים שלשום שלשוה סוגים של משולשים ושלושת שווי שוקיים.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ג

6. מספר מתחלק במספר ובמספר אחר ולא מתחלק באף מספר קטן יותר מלבד ל-1. בנוסף, ידוע ש-

$$\text{pear} \times \text{pear} + \text{apple} \times \text{apple} = \text{flower}$$

מצאו את כל האפשרויות ל- והוכיחו שאין אפשרויות נוספות.

תזכורת: נגיד ש- מתחלק ב- אם \div הוא מספר שלם. לדוגמה, 20 מתחלק ב-4, כי $20 \div 4 = 5$.

תשובה: 20 היא האפשרות היחידה ל- .

פתרון: אם המספר אי-זוגי, גם וגם אי-זוגיים, כי מספר זוגי לא יכול לחלק מספר אי-זוגי. לכן גם המספרים \times ו- \times הם אי-זוגיים. בזהות

$$\text{pear} \times \text{pear} + \text{apple} \times \text{apple} = \text{flower}$$

בצד שמאל יש סכום של שני מספרים אי-זוגיים, שזה מספר זוגי. אבל מצד ימין יש מספר אי-זוגי, שזו סתירה. לכן חייב להיות זוגי.

כעת, אנחנו יודעים ש- מתחלק ב-2, לכן $\text{pear} = 2$. נציב זאת במשוואה ונשכתב אותה:

$$2 \times 2 + \text{apple} \times \text{apple} = \text{flower}$$
$$4 = \text{flower} - \text{apple} \times \text{apple}$$

צד ימין הוא חיסור בין שני מספרים שמתחלקים ב- , לכן צד ימין מתחלק ב- . אז גם צד שמאל מתחלק ב- , כלומר 4 מתחלק ב- . לכן הוא 1 או 2 או 4. נתון ש- הוא לא 1, ונתון ש- ו- שונים, לכן $\text{apple} = 4$. אז

$$\text{flower} = \text{pear} \times \text{pear} + \text{apple} \times \text{apple} = 2 \times 2 + 4 \times 4 = 20$$

ו-20 הוא המספר היחיד שמקיים את תנאי השאלה.

בהצלחה!