أُولمبيادة الرّياضيات القُطْريّة للصّفوف ثامن -تاسع

المرحلة النّهائيّة لعام 2023

1. عيّنوا 8 نقاط في المستوى، حيث أنّ لكلّ نقطة تتواجد أربع نقاط أخرى تبعد عن هذه النّقطة الأبعاد التّالية: 2, 3, 4, 5.

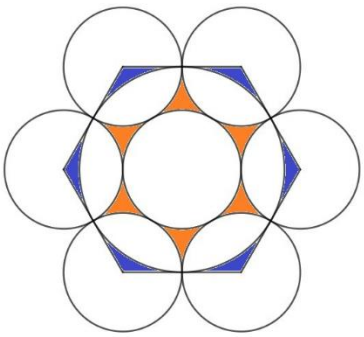
2. في دوّار دائريّ موضوعة بسطات ل 100 تاجر (البسطة: مكان يعرض فيه البائع بضاعته)، بحيث أنّ كلّ واحد من التّجار يملك كميّة معيّنة من القطع النّقديّة. يبيع كلّ تاجر سمكًا بسعرٍ ثابتٍ خاصّ به. كميّة الأسماك لدى كل تاجر غير محدودة. في اليوم الأوّل كوّن أحد التّجّار صنّارة من ذهب. في كلّ يوم يأتي بعد هذا اليوم، التّاجر الّذي يملك بين يديه صنّارة الذّهب يتّجه إلى بَسْطة التّاجر الذّي يليه في الدّائرة، يسلّمه صنّارة الذّهب ويشتري منه أكبر عدد ممكن من الأسماك وفقًا للمال الّذي يملكه.

إذا حدث ولم يستطع أيّ من التّجّار شراء الأسماك يومًا ما، نُطلق على هذا اليوم "يومًا حزينًا".

برهنوا أنّه إذا كان اليوم ال 2022 "يومًا حزينًا"، فإنّ اليوم ال 2023 سيكون "يومًا حزينًا" أيضًا.

3. ما هو أصغر عدد أوّلي $p > 10$ يحقّق أنّ العدد: $|105 - 2p|$ مؤلّفًا (أي ليس أوّليًا).

4. في الرّسمة نرى 7 دوائر متساوية في الكبر والّتي تلامس بعضها في نقطة تماسّ. عندما وصلنا بين مراكز ستّة دوائر من هذه الدّوائر نتج مسدّس، ودائرة كبيرة محصورة في هذا المسدّس. **برهنوا أنّ المساحة الزّرقاء تساوي المساحة البرتقالية**.



5. في المركز الجماهيريّ تُمرَّر N دورات. في كلّ دورة يشترك عددٌ من التّلاميذ، ومعروف أنّه لا يمكن أن يشترك تلميذان في نفس الدّورات بالضّبط، وأنّ كلّ تلميذ يشترك في دورة واحدة على الأقلّ.

نسمّي تلميذين "**صديقين**" إذا اشتركا في نفس الدّورة. معروف أنّه إذا كان التّلميذ "أ" صديق التّلميذ "ب" والتّلميذ "ب" صديق التّلميذ "ج" فإنّ التّلميذ "أ" صديق التّلميذ "ج".

ما هي كميّة التّلاميذ القُصوى (الأكبر ما يمكن) الّذين بإمكانهم التّعلم في المركز الجماهيريّ؟ الإجابة ستكون بدلالة N .

6. جدوا جميع الحلول الّتي هي **أعداد موجبة** لهيئة المعادلات التّالية:

$$\begin{cases} x^2 + xy = z \\ y^2 + yz = x \\ z^2 + zx = y \end{cases}$$

7. في مثلّث متساوي الأضلاع ABC تقع النّقطة D على القطعة AB حيث إنّ $AD = \sqrt{3}BD$ والنّقطة E موجودة على القطعة AC حيث إنّ- $\sqrt{3}CE = 2AE$. المستقيم DE يقطع امتداد الضلع BC في النّقطة F. احسبوا مقدار الزّاوية $\angle DFB$ بالدّرجات.

בהצלחה!