האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב ב, שנת תשפ"ג

1. בכל משבצת של לוח 10×10 רשום מספר שלם בין 1 ל-100 (כל מספר רשום פעם אחת בדיוק). בכל שורה המספרים משמאל לימין נמצאים בסדר עולה ובכל עמודה המספרים מלמטה למעלה נמצאים בסדר עולה. העמודות ממוספרות מ-1 משמאל ל-10 מימין, והשורות מ-1 למטה ל-10 למעלה. מצאו את סכום מספרי השורה והעמודה המינימלי של משבצת עם מספר 39.

תשובה. 6.

פתרון. בתמונה התחלה של טבלה שבה 39 נמצא בשורה החמישית ובעמודה הראשונה, כלומר סכום של מספר השורה ומספר העמודה הוא 6. בשביל להשלים את הטבלה נרשום בה מספרים מ-40 עד 100 לפי הסדר, כל מספר נרשום במשבצת שמאלית ביותר שפנויה עדיין מבין המשבצות הנמוכות ביותר שפנויות עדיין.

39									
31	32	33	34	35	36	37	38		
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

לכל משבצת נתאים את המלבן שמכיל את המשבצת עצמה, את כל המשבצות שמימינה ואת כל המשבצות שמעליהן. למשבצת עם המספר 39 מתאים מלבן שמכיל לכל היותר 62 מספרים.

בשביל שסכום מספר השורה ומספר העמודה יצא 5 עלינו לרשום את 39 באחת המשבצות הצהובות. אבל במלבן שמתאים למשבצת הצהובה בעמודה הראשונה יש 70 מספרים. באופן דומה למשבצות הצהובות בעמודות 2,3,4 מתאימים מלבנים עם 72,72,70 בהתאמה ולכן לא ניתן לרשום את 39 באף אחת מהמשבצות הצהובות. ברור שגם במשבצות מתחת לאלכסון הצהוב לא ניתן לרשום 39, למשבצות נמוכות יותר מתאימים מלבנים גדולים יותר.

2. מספרים שלמים a, b, c, d מקיימים:

$$a + b = bc = d - c = \frac{d}{a}, c \neq 0, a \neq 0$$

מצאו את $a + b + c + d$.

תשובה. 12

פתרון ראשון. היות ו-$a + b = d - c$ אז $a + b + c = d$.
היות ו-$bc = \frac{d}{a}$, אז $abc = d$. מכאן $abc = a + b + c$ וביחד עם $a + b = bc$ נקבל ש-

$$abc = bc + c$$

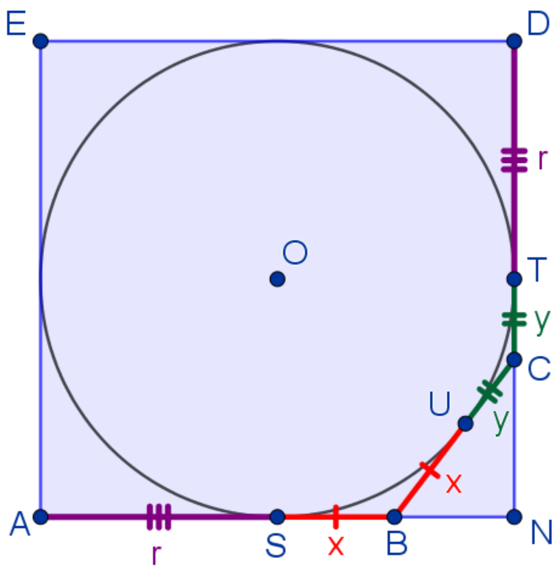
$c \neq 0$ ולכן מחלק ב-c ונקבל ש-

$$ab = b + 1$$

ממשוואה זו ברור ש-$a \neq 1$ ו-$b \neq 0$ ולכן $|a| \geq 2$ נשים לב שאם $|b| > 1$ אז אגף שמאל במשוואה האחרונה יצא גדול מאגף ימין ולכן $|b| = 1$, אם $b = -1$ אז $a = 0$ בסתירה לנתון ולכן $b = 1$ ו-$a = 2$. נשאר להציב ב-$a + b = bc$ ולקבל ש-$c = 3$ ומ-$d = bc + c$ נקבל ש-$d = 6$ ולכן $a + b + c + d = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

פתרון שני: כמו בפתרון הראשון נקבל ש-$abc = a + b + c$.
מהנתון $a + b = bc$ ניתן להסיק כי a מתחלק ב-b. כלומר $a = kb$ כאשר גם k שלם. נחלק את הנוסחה ב-b ונקבל $c = k + 1$.
נשכתב את $abc = a + b + c$ בצורה $kb^2(k + 1) = kb + b + k + 1 = (k + 1)(b + 1)$.
מותר לצמצם ב-$k + 1$ כי נתון ש-$c \neq 0$. לכן $kb^2 = b + 1$.
אבל $b + 1$ לא יכול להתחלק ב-b אלה אם כן $b = \pm 1$.
במקרה ש-$b = 1$ אז $k = b + 1 = 2$, כלומר $a = kb = 2$, ואז $c = k + 1 = 3$. מכאן רואים גם $d = a + b + c = 6$. נציב את הערכים שמצאנו ל-$a + b = bc = d - c = \frac{d}{a}$ על מנת לבדוק: $2 + 1 = 1 \cdot 3 = 6 - 3 = \frac{6}{2}$, וזה אכן עובד. במקרה זה $a + b + c + d = 12$.
במקרה ש-$b = -1$ נקבל $k = b + 1 = 0$ לכן $a = kb = 0$ וזה נוגד במפורש את הנתונים, לכן מקרה זה לא קיים.

3. במחומש $ABCDE$ הזוויות $\angle A, \angle D, \angle E$ הן ישרות, ונתונים אורכי הצלעות: $AB = 50, BC = 34, CD = 64$. בנוסף נתון שהמחומש **חוסם** מעגל. מהו אורך הרדיוס של המעגל החסום?



תשובה. 40

פתרון. נסמן את נקודת החיתוך של הישרים AB, CD ב-N. המרובע $AEDN$ הוא מלבן אבל נתון שהוא חוסם מעגל ולכן הוא ריבוע. נסמן ב-S, U ו-T נקודות ההשקה של המעגל החסום עם הצלעות AB, BC ו-CD בהתאמה. נסמן ב-r את רדיוס המעגל החסום. TOSN הוא ריבוע, ולכן $\mathrm{SA} = \mathrm{DT} = \mathrm{SN} = \mathrm{NT} = r$.

מכאן ניתן לסיים בשתי דרכים.

דרך ראשונה:

$$AB + CD = AS + BS + CT + TD = 2r + BC$$

ולכן

$$r = \frac{50 + 64 - 34}{2} = 40$$

דרך שנייה: נסמן $\mathrm{BX} = \mathrm{BU} = x$ ובנוסף $\mathrm{CU} = \mathrm{CT} = y$.

נתון לנו כי $r + y = \mathrm{CD} = 64$ ובנוסף $r + x = \mathrm{AB} = 50$.

ניתן לרשום משפט פיתגורס במשולש ישר זווית BNC:

$$(r-x)^2 + (r-y)^2 = (x+y)^2$$

נוכל לבטא את x, y באמצעות שתי הנוסחאות הקודמות ולהציב בנוסחה האחרונה, וכך נקבל משוואה על r:

$$\left(r-(50-r)\right)^2 + \left(r-(64-r)\right)^2 = (50+64-2r)^2$$

$$(2r-50)^2 + (2r-64)^2 = (114-2r)^2$$

נחלק ב-2^2 לפני שפותחים סוגריים:

$$(r-25)^2 + (r-32)^2 = (57-r)^2$$

$$2r^2 - 50r - 64r + 625 + 1024 = r^2 - 114r + 3249$$

$$r^2 = 1600$$

מכיוון ש- r חיובי, המסקנה היא ש- $r=40$.

4. הביטוי הבא שווה למספר שלם, מצאו את המספר:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{98}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}}{-\frac{1}{\sqrt{51}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{52}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{53}-\sqrt{3}}+\cdots-\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{49}}+\frac{1}{\sqrt{100}-\sqrt{50}}}$$

תשובה. 50

פתרון.

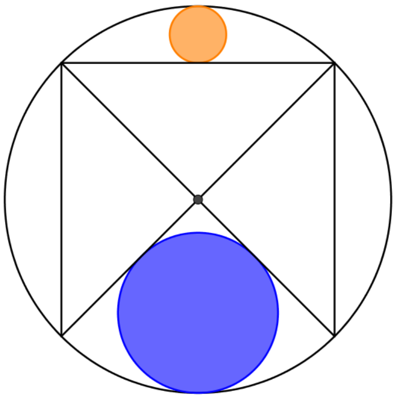
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{98}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}}{-\frac{1}{\sqrt{51}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{52}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{53}-\sqrt{3}}+\cdots-\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{49}}+\frac{1}{\sqrt{100}-\sqrt{50}}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}+\cdots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\left(\sqrt{99}+\sqrt{100}\right)\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}}{-\frac{\sqrt{51}+\sqrt{1}}{\left(\sqrt{51}-\sqrt{1}\right)\left(\sqrt{51}+\sqrt{1}\right)}+\frac{\sqrt{52}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{52}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{52}+\sqrt{2}\right)}-\cdots}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}+\cdots+\frac{}{98-97}+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}}{-\frac{\sqrt{51}+\sqrt{1}}{51-1}+\frac{\sqrt{52}+\sqrt{2}}{52-2}-\frac{\sqrt{53}+\sqrt{3}}{53-3}+\frac{\sqrt{54}+\sqrt{4}}{54-4}-\cdots+\frac{\sqrt{100}+\sqrt{50}}{100-50}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{98}-\sqrt{97}+\sqrt{100}-\sqrt{99}}{-\frac{\sqrt{51}+\sqrt{1}}{50}+\frac{\sqrt{52}+\sqrt{2}}{50}-\frac{\sqrt{53}+\sqrt{3}}{50}+\frac{\sqrt{54}+\sqrt{4}}{50}-\cdots+\frac{\sqrt{100}+\sqrt{50}}{50}}=$$

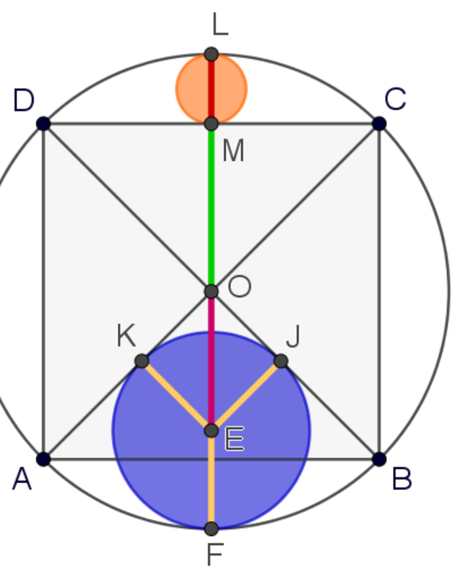
$$=50\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{98}-\sqrt{97}+\sqrt{100}-\sqrt{99}}{-\sqrt{51}-\sqrt{1}+\sqrt{52}+\sqrt{2}-\sqrt{53}-\sqrt{3}+\sqrt{54}+\sqrt{4}-\cdots}=50$$



5. במעגל חסום ריבוע. בין אלכסוני הריבוע למעגל חסום עיגול כחול ובין צלע הריבוע למעגל חסום עיגול כתום, כמתואר בציור:

חשבו את היחס בין שטח העיגול הכחול לשטח העיגול הכתום.

תשובה. 8.



פתרון. נשתמש בסימונים כמו בציור.

נניח כי אורך הצלע של ריבוע הוא 2. אז חצי מאורך הצלע $\text{MC} = \text{MO} = 1$. לכן לפי משפט פיתגורס במשולש COM רדיוס המעגל הגדול הוא $\sqrt{2}$. לכן הקוטר של העיגול הכתום (הקטע האדום בציור) שווה ל-

$$\text{LM} = \text{OL} - \text{OM} = \sqrt{2} - 1$$

ורדיוס העיגול הכתום $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

נעבור לעיגול הכחול. נניח שרדיוסו שווה ל- r. אז EJOK הוא ריבוע עם צלעות באורך r, והאלכסון באורך $r \cdot \sqrt{2}$.

לפיכך $\sqrt{2} = \text{OF} = \text{OE} + \text{EF} = r \cdot \sqrt{2} + r$.

מכאן $r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1} = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)$.

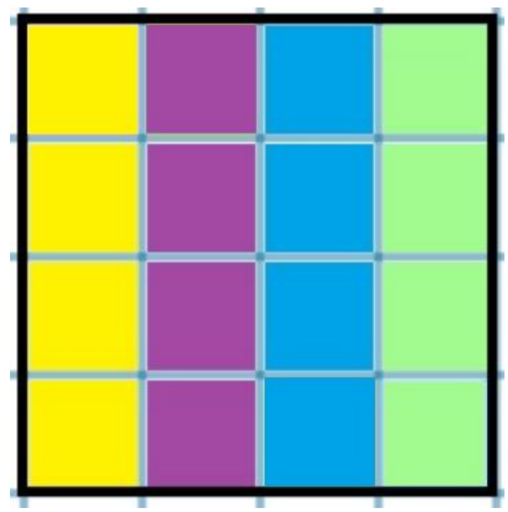
שטח של כל עיגול מחושב לפי הנוסחה πR^2 כש- R הוא הרדיוס. כיוון שחישבנו את הרדיוסים של שניהם היחס בין שטח העיגול הכחול לכתום שווה ל- $8 = \dfrac{2}{\frac{1}{4}} = \dfrac{\cancel{\pi} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \cancel{\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^2}{\cancel{\pi} \cdot \left(\dfrac{\cancel{\sqrt{2}-1}}{2}\right)^2}$.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

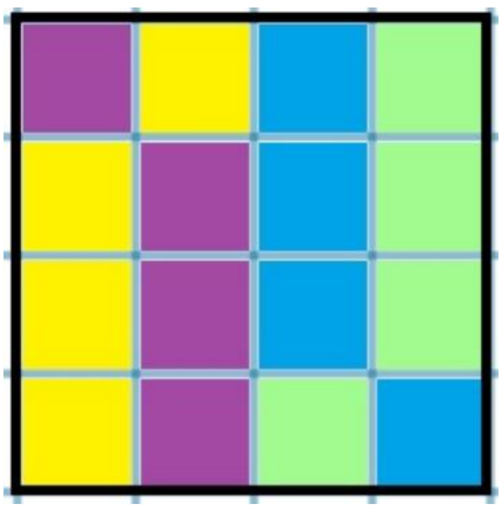
שלב ב, שנת תשפ"ג

6. נתון לוח משבצות 4×4. אליאורה רוצה לחלק אותו ל-4 צורות חופפות שכל אחת מהן מכילה בדיוק 4 משבצות מלאות של הלוח. בין כל שתי משבצות באותה צורה צריך להיות מסלול שעובר בתוך הצורה ויכול לעבור מכל משבצת למשבצת הסמוכה אליה לפי צלע בלבד. שתי צורות נקראות חופפות אם ניתן להעביר אחת מהן לשנייה על ידי הזזה, סיבוב ושיקוף. שתי חלוקות נקראות שונות גם אם ניתן לקבל את האחת מהשנייה באמצעות סיבוב או שיקוף של הלוח. בכמה דרכים אליאורה יכולה לבצע את המשימה?

דוגמה לחלוקה חוקית:

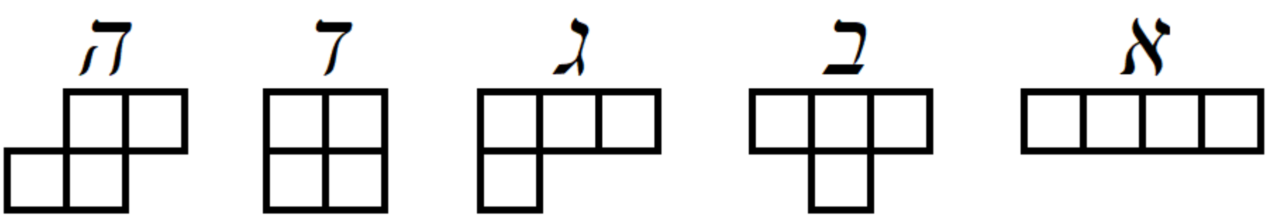


דוגמה לחלוקה לא חוקית:



תשובה. 15.

פתרון. יש רק שתי צורות שניתן להרכיב מ-3 משבצות (כמו בציור).
כאשר מנסים לצרף משבצת נוספת לכל אחד מהם, מקבלים שיש 5 צורות שמורכבות מ-4 משבצות.

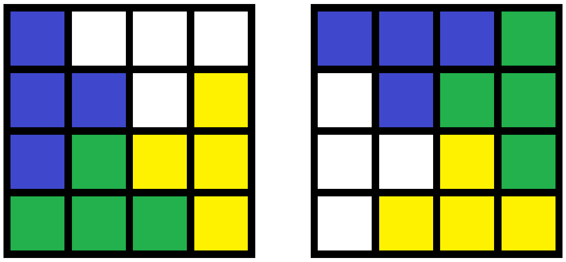


נספור, כמה דרכים יש לרצף עם כל סוג.

א. ניתן לשים את הצורות לאורך או לרוחב. לא ניתן לשלב צורות שניתן לשים לאורך ולרוחב, כי הן יחתכו. לכן במקרה זה יש 2 אפשרויות.

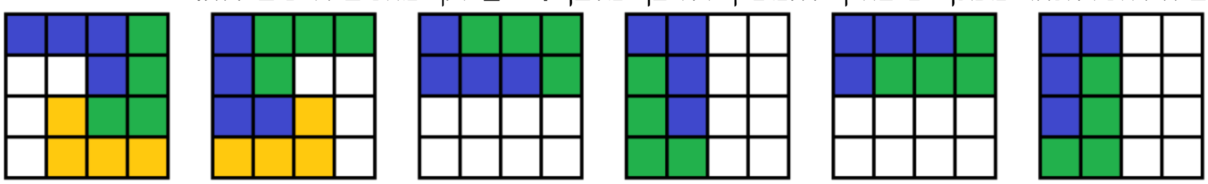
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב ב, שנת תשפ"ג

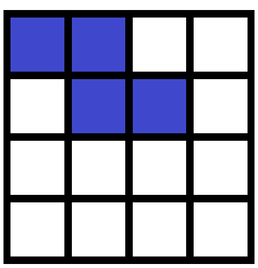


ב. בפינה שמאלית עליונה חייבים לשים צורה באחת משתי דרכים (בצבע כחול בציור). בכל מקרה ניתן להמשיך בדרך יחידה: חייבים צורה ירוקה, ואז את הצורה הצהובה, ומה שנשאר. ובכן, יש 2 ריצופים שונים.

ג. ישנם 6 דרכים לכסות את הפינה השמאלית עליונה (הצורה הכחולה בציורים), ובשני המקרים השמאליים ניתן לראות שיש דרך אחת ויחידה להמשיך. ב-4 המקרים הימניים, הצורה הירוקה נקבעת ביחידות ולאחר מכאן יש צורך להמשיך ולרצף מלבן 2×4 וקיימות **2** דרכים לזה.



לכן יש 10 ריצופים שונים.



ד. בכל פינה חייבים לשים ריבוע 2×2 וזה נותן ריצוף אחד.

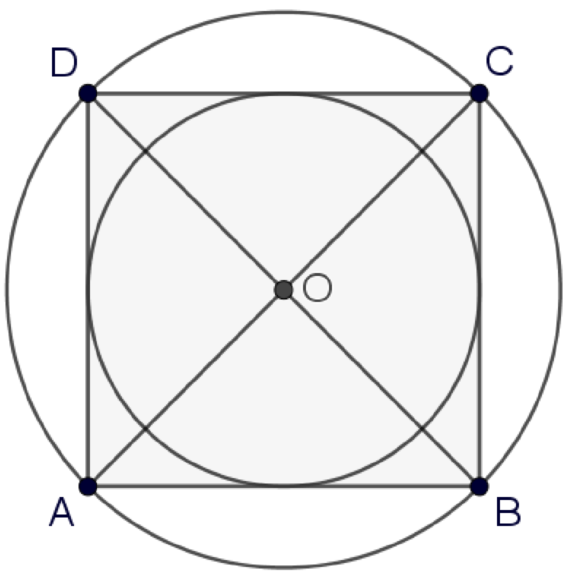
ה. אין שום דרך לרצף, כי חייבים לכסות פינה שמאלית עליונה חייבים לכסות באחת משתי דרכים סימטריות, ואז נוצרות משבצות שאין שום דרך לכסות אותן, כמו שתי המשבצות הימניות בשורה העליונה בציור.

נסכם: ישנם $2+2+10+1=15$ ריצופים שונים.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב ב, שנת תשפ"ג

7. מצולע משוכלל בעל 2022 צלעות **חסום** במעגל. במרכז המעגל נמצא עיגול בעל **שטח קטן פי 2** משטח המעגל הגדול. מצוירים כל המיתרים עם קצוות בקודקודי המצולע. חשבו את ההפרש בין מספר המיתרים שעוברים בעיגול הפנימי למספר המיתרים שאינם עוברים דרכו.



תשובה. 1011.

פתרון. בדומה למה שעשינו בפתרון לשאלה 5, קל לראות שאם יש עיגול חוסם של ריבוע ועיגול חסום של ריבוע, יחס השטחים שלהם הוא פי 2. לכן המיתר של המעגל הגדול חותך את המעגל הקטן אם ורק אם שתי הקשתות שנוצרות בצדדים של המיתר גדולות מ- 90°. מכיוון ש-2022 לא מתחלק ב-4, אין מיתר עם קצוות בקודקודי המצולע שמשיק למעגל עם שטח קטן פי 2. לכל קודקוד, אם נחבר אותו לשני קודקודים מנוגדים, קשת אחת תהיה קטנה מ- 90° וקשת אחרת גדולה מ- 90°, כלומר המיתרים מהקודקוד באים בזוגות של אחד חותך ואחד לא. המיתר היחיד שלא שייך לכאלה זוגות הוא זה שמחבר את שני הקודקודים הנגדיים. יש 1011 מיתרים כאלה. לכן ההפרש בין סה"כ כמות המיתרים שחותכים את המעגל החוסם לכמות המיתרים שהם לא חותכים שווה ל-1011.