האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'
שלב ב, שנת תשפ"ג

1. רוצים לרשום תרגיל חשבון, שמשתמש רק בספרה 1, ובסימנים פלוס ומינוס, והתוצאה היא 678. מהי הכמות הקטנה ביותר של ספרות 1?

תשובה. 18.

פתרון. נראה דרך לקבל את 678 עם 18 אחדים:

$$678 = 1111 - 111 - 111 - 111 - 111 + 11$$

נוכיח שזו הכמות המינימלית של ספרות 1 שנצטרך. נחלק למקרים על פי כמות הספרות במספר הגדול ביותר בתרגיל שלנו.
אם אנו משתמשים רק במספרים חד ספרתיים אז נטרך 678 אחדים.
אם משתמשים במספרים דו-ספרתיים אז נצטרך לחבר את 11 לפחות 66 פעמים בשביל להגיע ל-666 וזה לפחות 132 ספרות.
אם מותר מספרים תלת-ספרתיים אז רק בשביל לעבור את 600 צריכים לחבר את 111 לפחות 6 פעמים וזה כבר 18 ספרות ועוד לא הגענו ל-666.

אם משתמשים ב-1111 אז צריכים להפחית את 111 לפחות 4 פעמים בשביל לרדת מ-700 ואז אפשר להוסיף את 11 וזה בדיוק התרגיל שעשינו בהתחלה.

אם משתמשים ב-11111 אז צריך להוריד את 1111 לפחות 9 פעמים בשביל לרדת מ-2000 וזה כבר לפחות 41 אחדים.

אם משתמשים במספרים יותר גדולים המצב נהיה רק יותר גרוע.

2. בתרגיל החיבור הבא כל אות מסמלת ספרה. אותיות שונות מסמלות ספרות שונות. מהו המספר באנ? הערה: כל המספרים בתרגיל תלת ספרתיים, כלומר ניתן להניח שהספרות-"א", "נ" שונות מ-0.

$$\text{באנ} = \text{ננא} + \text{אבא}$$

תשובה. 527.

פתרון. כאשר מסתכלים על ספרת האחדות רואים כי **א**+**נ** מסתיים בספרה **ב**.

כשמסתכלים על ספרת העשרות רואים כי **ב**+**נ** ואולי פלוס 1 מסתיים בספרה **א**.

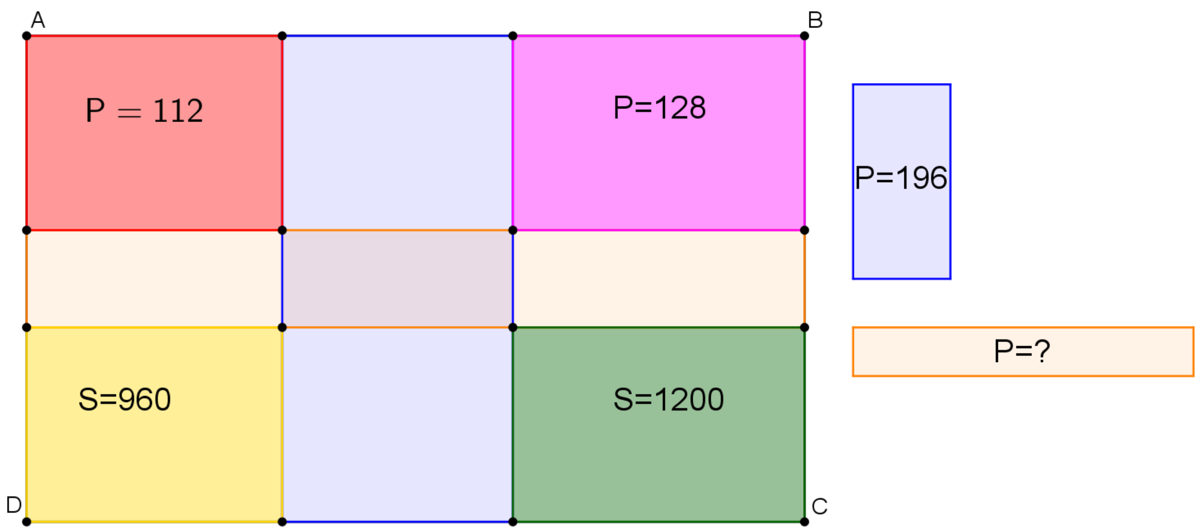
כלומר כאשר מוסיפים ל-**א** את **נ** פעמיים ואולי גם מוסיפים 1 נשארים עם **א**. אבל **נ**+**נ** מסתיים בספרה זוגית, ואם מוסיפים גם 1 זה מסתיים בספרה אי-זוגית וזה אמור לשנות, אז לא מוסיפים 1. כלומר **נ**+**נ** מסתיים ב-0, אבל **נ** שונה מ-0, כלומר **נ** =5.

נתבונן בספרת המאות, נראה ש-**א**+**א** ואולי פלוס 1 שווה ל-5. לכן **א** =2.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'</u>
שלב ב, שנת תשפ"ג

כעת שוב נסתכל על ספרת האחדות ונקבל שהספרה **ב** מתקבלת בתור 5+2=7.

3. בתוך מלבן $ABCD$ מצוירים מלבן כחול ומלבן כתום, ידוע <u>שהיקף</u> המלבן הכחול הוא 196 ס"מ. בפינות של $ABCD$ נוצרים ארבעה מלבנים: אדום, צהוב, ירוק, וורוד. נתון <u>שהיקף</u> המלבן האדום הוא 112 ס"מ, <u>היקף</u> המלבן הוורוד הוא 128 ס"מ, <u>שטח</u> המלבן הצהוב הוא 960 סמ"ר <u>ושטח</u> המלבן הירוק הוא 1200 סמ"ר. חשבו את **היקף** המבלן הכתום.



תשובה. 232

פתרון. היחס בין שטח המלבן הירוק לשטח המלבן הצהוב הוא כמו היחס בין הרוחב שלהם, הרי הגובה שלהם זהה, וזה שווה ל- $\frac{5}{4}=\frac{5\cdot 24}{4\cdot 24}=\frac{120}{96}=\frac{1200}{960}$.

זה גם היחס של רוחב המלבן הוורוד ורוחב המלבן האדום, כי זה אותם מספרים.

הפרש בין היקפים של המלבן הוורוד למלבן אדום שווה ל-16. בהפרש זה פעמיים הגובה מתקזז, ונשאר ההפרש בין פעמיים הרוחב. לכן הפרש בין הרוחב של המלבן הוורוד לרוחב של המלבן הכתום הוא 8. הפרש זה שווה לחמישית מהרוחב של המלבן הוורוד ושווה גם לרבע מהרוחב של המלבן האדום. כלומר הרחוב של המלבן הוורוד (והירוק) הוא 40, ורוחב של המלבן האדום הוא 32.

היקף המלבן הוורוד הוא 128, כלומר גובה + רוחב שלו שווה ל-64. היות שהרוחב הוא 40, הגובה הוא 24.

במלבן הירוק, הרוחב הוא 40 והשטח הוא 1200, לכן הגובה הוא 30.

במלבן האדום, הגובה הוא 24 (כמו בוורוד) והרוחב הוא 32.

בשביל לקבל מהרוחב של המלבן הכחול את הרוחב של המלבן הכתום, צריך להוסיף לו את הרוחב של המלבן הירוק ואת הרוחב של המלבן האדום, כלומר להוסיף $72 = 32 + 40$.

בשביל לקבל מגובה של המלבן הכחול את הגובה של המלבן הכתום, צריך להחסיר ממנו את הגובה של המלבן הירוק ואת הגובה של המלבן האדום, כלומר להחסיר $54 = 24 + 30$.

היקף זה פעמיים גובה פלוס פעמיים רוחב. לכן בשביל לקבל מהיקף המלבן הכחול את היקף המלבן הכתום, צריך להוסיף $2 \cdot (72 - 54) = 2 \cdot 18 = 36$.

היקף המלבן הכחול הוא 196, לכן היקף המלבן הכתום הוא $196 + 36 = 232$.

4. ביער קסום יש 40 ציפורים מ-3 סוגים: דרורים, יונים וינשופים. כמות הדרורים גדולה פי 2 מכמות הינשופים. כמות היונים קטנה משליש מכמות הציפורים הכוללת. כמות הינשופים קטנה מרבע מכמות הציפורים הכוללת. כמה דרורים יש ביער?

תשובה. 18

פתרון. כמות הינשופים בעצם היא לכל היותר 9. לכן כמות הדרורים שזה פי 2 מהינשופים, היא לכל היותר 18. יחד יש לכל היותר 27 יונים וינשופים, שזה משאיר לפחות 13 יונים.

לו היו פחות ינשופים, היו גם פחות דרורים והיינו צריכים יותר מ-13 יונים.

מצד שני כמות היונים היא לכל היותר שליש מכמות הציפורים הכוללת, כלומר לכל היותר $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ ומכיוון שזה מספר שלם זה לכל היותר 13 יונים. לכן שי בדיוק 13 יונים, בדיוק 9 ינשופים, ובדיו 18 דרורים.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'
שלב ב, שנת תשפ"ג

5. בכל משבצת של לוח 10×10 רשום מספר שלם בין 1 ל-100 (כל מספר רשום פעם אחת בדיוק). בכל שורה המספרים משמאל לימין נמצאים בסדר עולה ובכל עמודה המספרים מלמטה למעלה נמצאים בסדר עולה. העמודות ממוספרות מ-1 משמאל ל-10 מימין, והשורות מ-1 למטה ל-10 למעלה. מצאו את סכום מספרי השורה והעמודה המינימלי של משבצת עם מספר 39.

תשובה. 6

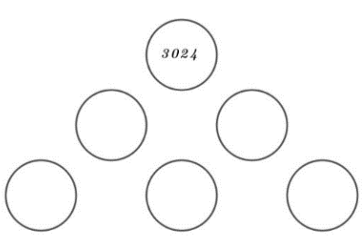
פתרון. בתמונה התחלה של טבלה שבה 39 נמצא בשורה החמישית ובעמודה הראשונה, כלומר סכום של מספר השורה ומספר העמודה הוא 6. בשביל להשלים את הטבלה נרשום בה מספרים מ-40 עד 100 לפי הסדר, כל מספר נרשום במשבצת שמאלית ביותר שפנויה עדיין מבין המשבצות הנמוכות ביותר שפנויות עדיין.

39									
31	32	33	34	35	36	37	38		
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

לכל משבצת נתאים את המלבן שמכיל את המשבצת עצמה, את כל המשבצות שמימינה ואת כל המשבצות שמעליהן. למשבצת עם המספר 39 מתאים מלבן שמכיל לכל היותר 62 מספרים.

בשביל שסכום מספר השורה ומספר העמודה יצא 5 עלינו לרשום את 39 באחת המשבצות הצהובות. אבל במלבן שמתאים למשבצת הצהובה בעמודה הראשונה יש 70 מספרים. באופן דומה למשבצות הצהובות בעמודות 2,3,4 מתאימים מלבנים עם 72,72,70 בהתאמה ולכן לא ניתן לרשום את 39 באף אחת מהמשבצות הצהובות. ברור שגם במשבצות מתחת לאלכסון הצהוב לא ניתן לרשום 39, למשבצות נמוכות יותר מתאימים מלבנים גדולים יותר.

6. על הלוח צוירו שישה עיגולים כמתואר בציור. בכל עיגול נרשם מספר שלם כך שהמספר הרשום בכל עיגול היה שווה למכפלת שני המספרים בעיגולים שמתחתיו. **ידוע שכל המספרים בכל העיגולים היו שונים זה מזה.** המספרים נמחקו ונשאר רק המספר בעיגול העליון: "3024". מהו סכום המספרים הגדול ביותר שהיה יכול להיות רשום בשורה התחתונה?



תשובה. 257.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'</u>
שלב ב, שנת תשפ"ג

פתרון. נניח שהמספרים בשורה התחתונה הם a,b,c בסדר זה. אז בשורה האמצעית רשומים המספרים $b\cdot c$, $a\cdot b$, והמספר בשורה הראשונה הוא בעצם $a\cdot b^2\cdot c$. נשים לב כי אסור ש-1 יופיע באף אחד מהעיגולים, כי אז המספר שלצידו שווה למספר שמעליהם, בניגוד לתנאי שכל המספרים שונים.

על מנת לפרק את 3024 לגורמים ראשוניים, מחלקים אותו ב-2 וב-3 כל עוד אפשר, ומגיעים למסקנה כי $3024=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7$.

אם $a=3$, $b=2$, $c=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7=252$ אז בשורה אמצעית רשום 6, 504 וכל המספרים שונים וכל התנאים מתקיימים. במקרה זה הסכום $a+b+c=257$.

אנו נוכיח שזה הסכום הכי גדול שיכול להיות.

אם b אינו 2, הוא לפחות 3, ולכל היותר 12, הרי 3024 מתחלק ב-b^2 לכן b יכול להכיל 2 לכל היותר פעמים כגורם, ואת 3 לכל היותר פעם אחת. בכל מקרה, מכפלה $a\cdot c$ היא לכל היותר $\frac{3024}{3^2}=\frac{1008}{3}=336$. כיוון שגם a וגם c גדולים מ-1, הגדול מהם הוא לכל היותר $\frac{336}{2}=168$ והגורם הקטן הוא לכל היותר 20, הרי $20^2=400$.

לכן במקרה זה $a+b+c\le20+12+168=200$ וזה פחות טוב מדוגמה שהייתה לנו עם 257.

ובכן, דוגמה הכי טובה צריכה להיות עם $b=2$. במקרה זה $a\cdot c=\frac{3024}{4}=756$, ונרצה לקבל סכום קטן ככל האפשר. כבר דיברנו על כך שהמספרים a,c לא יכולים להיות 1. הם גם לא יכולים להיות 2 כי הם שונים מ-b. כבר ראינו דוגמה בהם אחד הגורמים הוא 3. נשאר לבדוק מקרה שהמספרים a,c הם לפחות 4. אז המספר הגדול מבין a ו-c הוא לכל היותר $\frac{756}{4}=189$, והמספר הקטן הוא לכל היותר 30 הרי $30^2>756$. לכן $a+b+c\le189+2+30=221$ וזה פחות טוב מ-257 שכבר היה. לכן הדוגמה שהצגנו היא היעלה ביותר.

7. תלמידי כיתה ז' מתכננים לצאת לטיול של חמישה ימים. כל יום התלמידים יכולים לעבור 10 קילומטרים, 20 קילומטרים או לנוח. סך הכל התלמידים רוצים לעבור 50 קילומטרים. בכמה דרכים שונות ניתן לתכנן את הטיול?

פתרון ראשון: אם בכל יום עוברים 10 ק"מ, בחמישה ימים יתקבל 50 ק"מ כמו שצריך. אם בחלק מהימים עוברים 10 ק"מ יותר, אז באותה כמות ימים יעברו 10 ק"מ פחות. מכאן אפשר להבין שיש בעצם 3 סוגים של מקרים.

- בכל יום עוברים 10 ק"מ, וזה בעצם מקרה אחד.
- יש יום שבו עברו 20 ק"מ ויש יום שבו עברו 0 ק"מ, וביתר הימים עברו 10 ק"מ. יש 5 דרכים לבחור את היום של מנוחה, ובהינתן היום של מנוחה יש 4 דרכים לבחור יום שבו עוברים 20 ק"מ, וזה נותן $5\cdot 4=20$ מקרים.
- בשני ימים עוברים 20 ק"מ, בשני ימים אחרים עוברים 0 ק"מ, ויש יום שבו עוברים 10 ק"מ.

את היום שבו עוברים 10 ק"מ ניתן לבחור ב-5 ימים. אם היום הזה נבחר, יש $\frac{4\cdot 3}{2}$ דרכים לבחור את שני הימים של מנוחה (מחלקים ב-2 כי לא משנה באיזה סדר בוחרים אותם). לכן יש $5\cdot\frac{4\cdot 3}{2}=30$ אפשרויות במקרה זה.

בסה"כ יש $1+20+30=51$ אפשרויות.

פתרון שני: נשים לב שאם תוך 4 ימים התלמידים עברו 30,40 או 50 קילומטרים אז יש דרך אחת ויחידה לעבור 50 קילומטרים תוך 5 ימים (לעבור 20,10 ו-0 קילומטרים ביום החמישי בהתאמה) לכן כמות הדרכים לעבור 50 קילומטרים ב-5 ימים שווה לסכום של כמויות הדרכים לעבור 30,40 ו-50 קילומטרים ב-4 ימים. ובאופן כללי יותר, כמות הדרכים לעבור $10M$ קילומטרים ב-N ימים שווה לסכום של כמויות הדרכים לעבור $10(M-1)$, $10(M-2)$ ו-$10M$ קילומטרים ב-$N-1$ ימים.

נבנה טבלה, שורות הטבלה יסמנו את מספר הימים שעורך טיול ועמודות הטבלה יסמנו את מספר הקילומטרים שהתלמידים רוצים לעבור. בכל תא בטבלה נרשום את כמות הדרכים לעבור את המרחק המתאים תוך כמות הימים המתאימה (על פי מספרי השורה והעמודה). כפי שהסברנו, ניתן לחשב את הערך בכל תא על פי סכום הערכים בשלושת התאים שנמצאים בשורה אחת מעל ובעמודה שלנו ושתי העמודות משמאל למשבצת שלנו.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב ב, שנת תשפ"ג

להלן הטבלה המתאימה:

מרחק / ימים	0	10	20	30	40	50	60	70	80
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	3	2	1	0	0	0	0
3	1	3	6	7	6	3	1	0	0
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1
5	1	5	15	36	45	51	45	36	15

כפי שניתן לראות מהטבלה, מספר הדרכים לעבור 50 קילומטרים תוך 5 ימים היא 51.