האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'
שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

1. נקרא למספר *קסום* אם הוא ארבע ספרתי וכולל את כל הספרות מ-1 עד 4 בדיוק פעם אחת.
כמה מספרים קסומים מתחלקים ב-11?

פתרון. נוכיח סימן חלוקה ב-11: מספר מתחלק ב-11 אם סכום מתחלף של ספרותיו מתחלק ב-11. אכן, נגיד מספר 4-ספרתי $\overline{dcba}$, אז ניתן לרשום אותו בצורה:

$$a+10\cdot b+100\cdot c+1000\cdot d=$$
$$=a+(1-11)\cdot b+(1+99)\cdot c+(1-1001)\cdot d=$$
$$=a+b+c+d+11\cdot(-b+9\cdot c-91d)$$

וזה דומה גם למספרים יותר ארוכים.

ובכן, אנחנו צריכים לספור מספרים 4-סבפרתיים שספרותיהם a,b,c,d הם $1,2,3,4$ בסדר כלשהו, כך שמתקיימת דרישה $a-b+c-d$ מתחלק ב-11. אבל אפילו $3+4-1-2<11$. לכן המספר $a-b+c-d$ קטן יותר מ-11 וגדול יותר מ--11, לכן צריך שיתקיים $a-b+c-d=0$, במילים אחרות $a+c=b+d$. הדרך היחידה להגיע לזה היא שבאגף אחד $1+4$ ובאגף האחר $2+3$. כלומר הדבר שאפשר להחליט עליו זה באיזה אגף יש $1+4$, ובכל אגף אפשר לרשום את המחוברים באחד משני סדרים שונים, וזה נותן לנו $2\cdot2\cdot2=8$ אפשרויות.

2. מספרים שלמים חיוביים a,b מקיימים: $a+b=\frac{101}{a}+\frac{101}{b}$.
מצאו את $a+b+\frac{101}{a}+\frac{101}{b}$.

פתרון. נעשה מכנה משותף באגף ימין: $a+b=101\cdot\frac{a+b}{ab}$. כיוון ש-$a,b$ חיוביים, ניתן לחלק את שני האגפים ב-$a+b$. לכן $1=\frac{101}{ab}$. כלומר $ab=101$.

נשים לב כי 101 הוא ראשוני, הרי הוא לא מתחלק ב-2, 3, 5 ו-7, ולו היה מחלק ל-101 שקטן ממנו, אז היה גם מחלק ראשוני שקטן מ-11. לכן מהמשוואה $ab=101$ ניתן להסיק כי a,b הם 1, 101 בסדר כלשהו. לכן $a+b+\frac{101}{a}+\frac{101}{b}=1+101+101+1=204$.

3. ידוע שלמשוואה $x^2 - nx + 5n = 0$ יש שני פתרונות שונים במספרים שלמים. חשבו את סכום כל הערכים האפשריים של n.

פתרון. ניתן לחשב את השורשים לפי נוסחה: $\frac{n \pm \sqrt{n^2 - 20n}}{2}$.

על מנת ששני השורשים יהיו שלמים, חייבים שגם n יהיה שלם (הרי זה סכום השורשים), וגם תחת השורש חייב להיות ריבוע שלם. כלומר קיים גם מספר אי-שלילי שלם k כזה ש- $n^2 - 20n = k^2$, כלומר $(n-10)^2 = k^2 + 10^2$, כלומר

$$(n-10-k)(n-10+k) = (n-10)^2 - k^2 = 10^2 = 2^2 \cdot 5^2$$

שני הגורמים באגף שמאל הם שלמים ומאותה זוגיות, כי ההפרש ביניהם הוא $2k$, ומאותו הסימן. לכן או ששניהם מתחלקים ב-5, ואז מקבלים $n-10-k = n-10+k = \pm 10$, או שרק אחד מהגורמים מתחלק ב-5, ואז אחד מהגורמים הוא ± 2 והאחר הוא ± 50.

סכום הגורמים בכל מקרה שווה ל- $2(n-10)$. זה מוביל אותנו למקרים הבאים:

א. אם $n-10-k = 10 = n-10+k$ אז $n-10 = 10$ כלומר $n = 20$. לכן $x^2 - 20 \cdot x + 100 = 0$ כלומר המשוואה היא בעצם $(x-10)^2 = 0$ כלומר יש שורש כפול.

ב. אם $n-10-k = -10 = n-10+k$ אז $n-10 = -10$ כלומר $n = 0$. אז המשוואה היא $x^2 = 0$ כלומר יש שורש כפול.

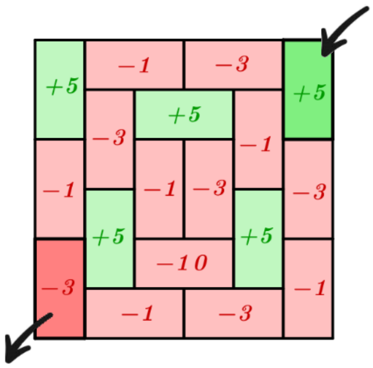
ג. אם $n-10+k$, $n-10-k$ הם 50 ו-2 בסדר כלשהו, אז $n-10 = \frac{52}{2} = 26$ כלומר $n = 36$. אז המשוואה היא $x^2 - 36x + 180 = 0$ כלומר $(x-18)^2 = 324 - 180 = 144$. במקרה זה יש שני שורשים שלמים שונים: $x = 18 \pm 12$.

ד. אם $n-10+k$, $n-10-k$ הם -50 ו- -2 בסדר כלשהו, אז $n-10 = \frac{-52}{2} = -26$ כלומר $n = -16$. אז המשוואה היא $x^2 + 16x - 80 = 0$ כלומר $(x+8)^2 = 80 + 64 = 144$. במקרה זה יש שני שורשים שלמים שונים: $x = -8 \pm 12$.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

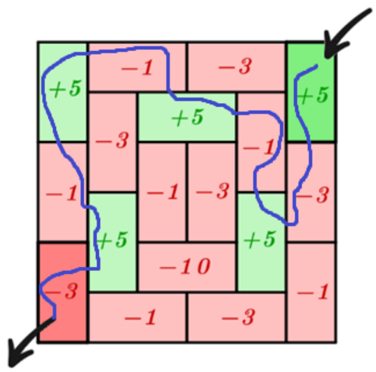
4. בתמונה מפה של ארמון. אלאדין נמצא בחדר הצפון מזרחי ורוצה לעבור לחדר הדרום מערבי. מכל חדר יש דלת לכל חדר סמוך.



בחדרים המסומנים בירוק במפה מוחבאים מטבעות זהב. כמות המטבעות בכל חדר כזה מסומנת במפה. כאשר אלאדין עובר בחדרים אלה, הוא לוקח את המטבעות לעצמו.

לעומת זאת, מעבר בחדרים המסומנים באדום במפה, עולה כסף. העלויות מסומנות במפה.

לאלאדין אסור לחזור לחדרים בהם הוא כבר ביקר.
מהי כמות המטבעות הגדולה ביותר שהוא יכול לצבור?



פתרון. בציור יש מסלול שאוסף את כל 25 המטבעות, ובמסלול זה צריך לשלם 3 פעמים, ולשלם 1 ופעמיים 3, כלומר סה"כ משלמים 9, והכמות שצוברים בארמון הוא $25-9=16$.

בכל מקרה צריך לשלם 3 מטבעות ביציאה. כל מעבר מחדר ירוק לחדר ירוק דורש מעבר בחדר אדום שזה כרוך בתשלום. כלומר אם היינו עוברים רק ב-3 חדרים ירוקים או פחות, היינו מרוויחים 15 מטבעות וגם משלמים, אז זה פחות טוב מהדוגמה שלנו. אם היינו עוברים ב-4 חדרים ירוקים, היינו מרוויחים רק 20 מטבעות ומשלמים לפחות 3 מטבעות במעברים ו-3 מטבעות בסוף, וזה אומר שלא היינו מרוויחים מעל $20-6=14$ מטבעות, שזה גם פחות טוב מהדוגמה שלנו.

לכן אם רוצים לבנות דוגמה יותר טובה אז חייבים לעבור בכל החדרים הירוקים, ולהקטין תשלומים במעברים מחדר ירוק לחדר ירוק. מכיוון שהחדרים הירוקים לא סמוכים, בכל מעבר בין חדר ירוק לחדר ירוק חייבים לשלם לפחות מטבע אחד. בדוגמתנו עשינו את זה בדיוק חוץ מפעם אחת ששילמנו 3 מטבעות; על מנת לקבל שיפור חייבים לעבור בין חדרים ירוקים רק באמצעות חדרים אדומים שבהם התשלום הוא מטבעה אחד. כלומר מהלך ראשון הוא צריך להיות באלכסון הדרום מערבי, ואחר כך חייבים להתקדם לחדר צפוני כי לא תהיה דרך אחרת להגיע אליו, ואז אנחנו נתקעים.

לכן הדוגמה שהראנו שבה מרוויחים 16 מטבעות היא הכי טובה שאפשר.

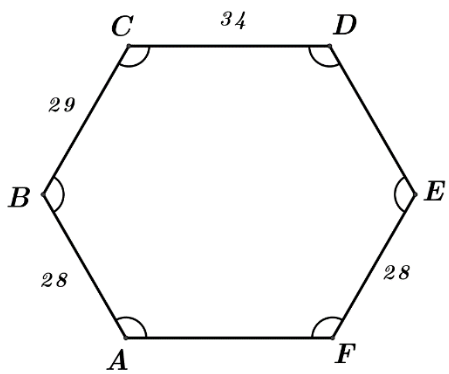
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ח'-ט'

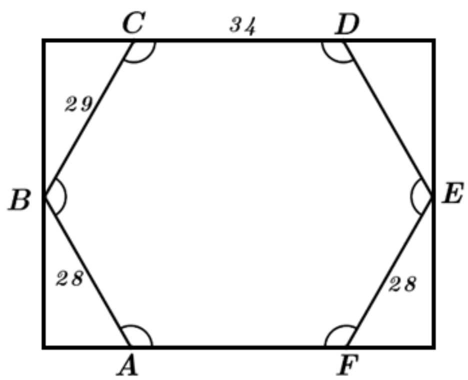
שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

5. נתון משושה $ABCDEF$ שבו כל הזוויות בעלות 120°,

$.AB = 28,\ BC = 29,\ CD = 34,\ EF = 28$

חשבו את $.DE \cdot FA$





פתרון. נמשיך את הקווים CD ו-AF, ונוריד אליהן אנכים מנקודות E ו-F. כן נוצר מלבן שמורכב ממשושה הנתון ו-4 משולשים שהזוויותיהן הם $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. נניח שבבל משולש מסוג זה אם היתר שלו הוא c אז הניצב הוא $k \cdot c$ כאשר זה אותו k לכל המשולשים האלה כי הם דומים (ניתן לחשב אותו במפורש, אבל אין צורך). אז הצלע השמאלית של המלבן בציור היא באורך $k \cdot (\mathrm{AB} + \mathrm{BC})$ והצלע הימנית היא באורך $k \cdot (\mathrm{DE} + \mathrm{EF})$. מכאן $\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{DE} + \mathrm{EF}$, ובמקרה שלנו זה אומר כי $28 + 29 = \mathrm{DE} + 28$, ולכן $\mathrm{DE} = 29$. באופן דומה כאשר ממשיכים צלעות AB ו-DE ומורידים אנכים לישרים אלה מ-C ו-F ניתן להראות כי $\mathrm{BC} + \mathrm{CD} = \mathrm{EF} + \mathrm{FA}$ ולכן $29 + 34 = 28 + \mathrm{FA}$ כלומר $\mathrm{FA} = 35$. לכן $\mathrm{DE} \cdot \mathrm{FA} = 29 \cdot 35 = (20 + 10 - 1) \cdot 35 = 700 + 350 - 35 = 1015$.

6. מצולע משוכלל בעל 2022 צלעות חסום במעגל.
במרכז המעגל הזה נמצא עיגול בעל רדיוס פי 2 קטן יותר מרדיוס המעגל הגדול. מעבירים את כל המיתרים עם קצוות בקודקודי המצולע (כלומר צלעות ואלכסונים של המצולע), שלא משיקים לעיגול הפנימי.
פי כמה מספר המיתרים שעוברים דרך העיגול הפנימי קטן יותר ממספר המיתרים שלא נוגעים בו?

פתרון. בכל משולש התיכונים מחלקים זה את זה ביחס 1:2. אבל במשולש משוכלל מפגש התיכונים הוא גם מרכז מעגל החוסם והחסום, ובמקרה של משולש משוכלל החלק הקצר של התיכון הוא רדיוס המעגל החסום והחלק הארוך של התיכון הוא רדיוס של המעגל החוסם. לכן במשולש משוכלל הרדיוס של המעגל החוסם גדול פי 2 מהרדיוס של המעגל החסום.
נסמן 3 קודקודים A, B ו-C של המצולע המשוכלל שהם גם הקודקודים של משולש המשוכלל (שבין כל 2 מהם נמצאים $\frac{2022}{3}$ צלעות של המצולע הנתון). אז הקטעים AB ו-AC משיקים למעגל הקטן.
הקטעים שמחברים את A לכל קודקוד של המצולע בין B ל-C חותך את המעגל הקטן, והקטעים

שמחברים את A לכל קודקוד בין A ל-B או בין A ל-C לא חותכים את המעגל הקטן. לכן בין הקטעים שמחברים את A לקודקודים האחרים של המצולע, שלא משיקים למעגל הקטן, יש פי שתיים יותר כאלה שלא חותכים את המעגל הקטן.

אם היינו סופרים את הקטעים שעוברים דרך קודקוד אחר במקום A, היינו מקבלים אותו דבר. לכן גם שסופרים את כל הקטעים, יהיה אותו יחס של פי 2.