האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

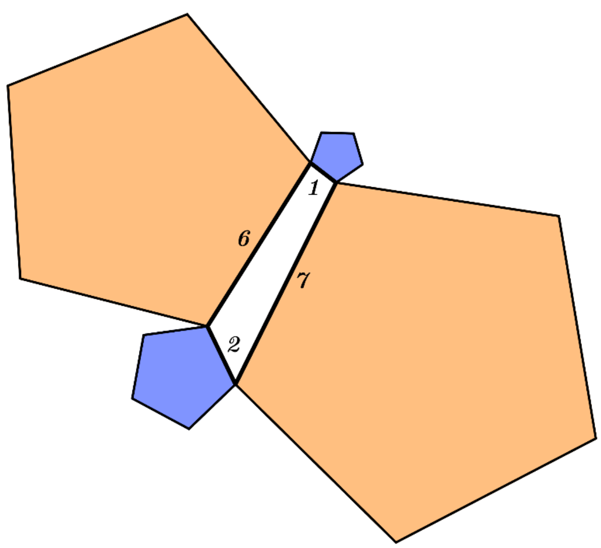
1. מספר נקרא *קסום* אם הוא ארבע ספרתי וכולל את כל הספרות מ-1 עד 4 בדיוק פעם אחת. כמה מספרים קסומים מתחלקים ב-11?

פתרון. נוכיח סימן חלוקה ב-11: מספר מתחלק ב-11 אם סכום מתחלף של ספרותיו מתחלק ב-11. אכן, נגיד מספר 4-ספרתי $\overline{dcba}$, אז ניתן לרשום אותו בצורה:

$$\begin{aligned}&a+10\cdot b+100\cdot c+1000\cdot d=\\&=a+(1-11)\cdot b+(1+99)\cdot c+(1-1001)\cdot d=\\&=a+b+c+d+11\cdot(-b+9\cdot c-91d)\end{aligned}$$

וזה דומה גם למספרים יותר ארוכים.

ובכן, אנחנו צריכים לספור מספרים 4-סבפרתיים שספרותיהם a,b,c,d הם $1,2,3,4$ בסדר כלשהו, כך שמתקיימת דרישה $a-b+c-d$ מתחלק ב-11. אבל אפילו $3+4-1-2<11$. לכן המספר $a-b+c-d$ קטן יותר מ-11 וגדול יותר מ--11, לכן צריך שיתקיים $a-b+c-d=0$, במילים אחרות $a+c=b+d$. הדרך היחידה להגיע לזה היא שבאגף אחד $1+4$ ובאגף האחר $2+3$. כלומר הדבר שאפשר להחליט עליו זה באיזה אגף יש $1+4$, ובכל אגף אפשר לרשום את המחוברים באחד משני סדרים שונים, וזה נותן לנו $2\cdot 2\cdot 2=8$ אפשרויות.



2. בתמונה מרובע שאורכי צלעותיו $7,2,6,1$. על כל צלע בונים כלפי חוץ מחומש משוכלל. חשבו פי כמה השטח הכתום גדול מהשטח הכחול.

פתרון. גודל של מחומש עם צלע a הוא $k\cdot a^2$. לכן כתום חלקי כחול שווה ל-

$$\frac{k\cdot 7^2+k\cdot 6^2}{k+k\cdot 2^2}=\frac{49+36}{1+4}=\frac{85}{5}=17$$

3. במסיבת קיץ הוגשו מיץ תפוחים ומיץ גזר. כל משתתף המסיבה שתה בסך הכל 200 מיליליטרים של מיץ. יוסי שתה $\frac{1}{10}$ ממיץ התפוחים ו-$\frac{1}{12}$ ממיץ הגזר. כמה אנשים השתתפו במסיבה?

פתרון. יוסי שתה יותר מ-$\frac{1}{12}$ מהמיץ בסה"כ לכן היו פחות מ-12 אנשים. מצד שני הוא שתה פחות מעשירית מהמיץ סה"כ, לכן היו מעל 10 אנשים. לכן היו בדיוק 11 אנשים.

4. מלך שלח חמישה משרתים לספור את כמות הכבשים בממלכה. הדיווחים שהוא קיבל מהמשרתים היו:
- מספר הכבשים מתחלק ב-12
- מספר הכבשים מתחלק ב-30;
- מספר הכבשים מתחלק ב-42;
- מספר הכבשים מתחלק ב-105;
- מספר הכבשים מתחלק ב-210.

ידוע שבדיוק שלושה מהדיווחים שגויים, ושמספר הכבשים בממלכה קטן מ-1000. מה מספר הכבשים הגדול ביותר האפשרי בממלכה?

פתרון. נשים לב כי

$$210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ ,\ 105 = 3\cdot 5\cdot 7\ ,\ 42 = 2\cdot 3\cdot 7\ ,\ 30 = 2\cdot 3\cdot 5\ ,\ 12 = 2^2\cdot 3$$

אם הדיווח של 30, של 42 או של 105 שגוי, אז גם הדיווח של 210 שגוי. כיוון שאחד מהדיווחים האלה שגוי, אז הדיווח של 210 שגוי.

אם לפחות שניים מבין הדיווחים של 30, 42 ו-105 נכונים, אז מספר הכבשים מתחלק בכפולה משותפת המינימלית שלהם, ולכן גם ב-210. אבל הדיווח של 210 הוא שגוי. לכן מבין הדיווחים של 30, 42 ו-105 רק אחד יכול להיות נכון והאחרים שגויים.

אבל זה נותן כבר 3 דיווחים שגויים: אחד של 210 ושני האחרים מבין 30, 42 ו-105. לכן אחד מבין הדיווחים של 30, 42 ו-105 נכון, וגם הדיווח של 12 נכון. לא יתכן ש-105 נכון כי המספר גם מתחלק ב-2 ואפילו ב-12, ואז זה היה מתחלק אפילו ב-210 והוא לא.

לכן אחד הדיווחים הנכונים הוא 12, והדיווח האחר שהוא נכון הוא לגבי 30 או 42. נבדוק את שני המקרים.

אם מספר הכבשים מתחלק ב-12 וב-30 אבל לא ב-7, אז הוא מתחלק בכפולתם המשותפת המינימלית של 12 ושל 30 שזה $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$. מספר הכי גדול שמתחלק ב-60 וקטן מ-1000 הוא $960 = 3\cdot 32\cdot 10$ והוא גם לא מתחלק ב-7.

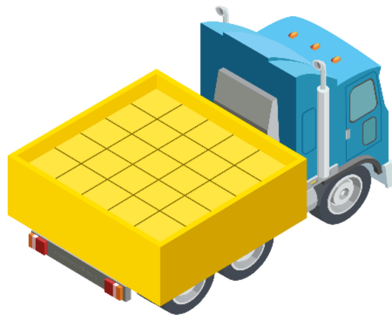
אם המספר מתחלק ב-12 וב-42, אבל לא מתחלק ב-5, אז הוא מתחלק בכפולתם המשותפת המינימלית של 12 ושל 42 שזה $84 = 2^2\cdot 3\cdot 7$. נשים לב כי $840 + 84 = 924$ זו כפולה הכי גדולה של 84 שקטנה מ-1000, וכי 924 לא מתחלק ב-5.

ובכן, באחד המקרים המספר הכי גדול שאפשרי הוא 960 ובמקרה האחר הוא 924, ולכן המספר הכי גדול האפשרי בכל מקרה הוא 960.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'</u>

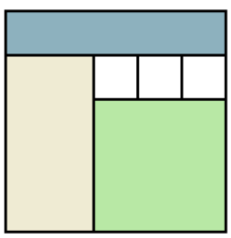
שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

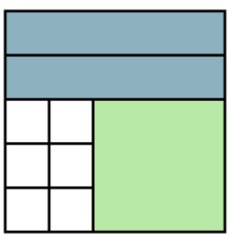
5. לגבי יש משאית בצורת ריבוע 5×5 (ראו ציור):



הוא רוצה להעביר בה 300 ספסלים בגודל 1×5 (כלומר, כל ספסל תופס בתוך המשאית מלבן 1×5),
200 ארונות בגודל 2×4
ו-100 שולחנות בגודל 3×3.

מהו המספר הקטן ביותר של נסיעות עם הרהיטים שגבי יצטרך לעשות, כדי להעביר את כל כולם?

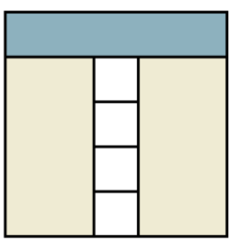




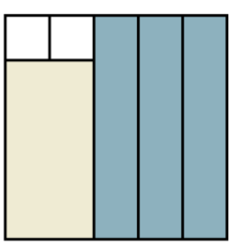
הערה: הרהיטים צריכים לעמוד על המשבצות בצורה מדויקת.

פתרון. נשים לב כי על המשאית ניתן להעלות רק שולחן אחד, כי לא משנה איך מניחים אותו הוא תופס את המשבצת המרכזית.

אם מכניסים שתי ארונות, אז לא יתכן שאחד מהן לרוחב והשני לרוחב. הרי אם ארון אחד נמצא בשתי שורות ומפספס רק עמודה אחת, וארון אחר נמצא בשתי עמודות ומפספס רק שורה אחת, ישנה שורה של ארון ראשון שגם ארון שני פוגש אותה, ובאותה שורה צריכים להיות שתי משבצות של ארון אחד ו-4 משבצות של ארון אחר אבל 5 משבצות בסה"כ.

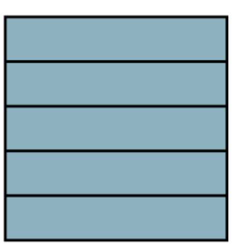


אם על המשאית יש שולחן, אז ניתן להניח רק ארון אחד לאורך או לרוחב, אבל אי-אפשר גם וגם. אם שמים ארון אחד לאורך נגיד, אז כבר בכל עמודה יש משבצת תפוסה, אז אפשר להוסיף רק ספסל לרוחב (אבל רק אחד).



אם יש שולחן ואין ארון, אפשר להוסיף עד שני ספסלים באותו כיוון, הרי אין מצב שיש ספסל לרוחב וספסל לרוחב.

אם יש שני ארונות, כמו שכבר אמרנו הם חייבים להיות באותו כיוון. במקרה זה ניתן להוסיף רק ספסל אחד, לאורך או לרוחב.



אם יש ארון אחד, אז ניתן להוסיף 3 ספסלים באותו כיוון, או ספסל אחד בכיוון האחר, אז עדיף כבר 3 באותו הכיוון.

אם אין לא ארון אז אפשר לשים עד 5 ספסלים.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

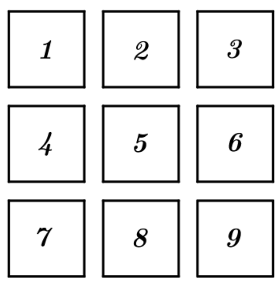
בכל מקרה, בכל המקרים שראינו, אם אין שולחן אז על כל ארון שמורידים אפשר לשים שני ספסלים.

נסביר כיצד להסתפק ב-180 משאים.

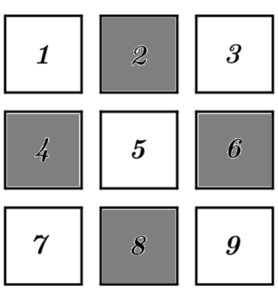
- 100 משאיות עם שולחן, ארון וספסל.
- 50 משאיות נוספות עם שני ארונות וספסל
- 30 משאיות נוספות עם 5 ספסלים בכל משאית.

נסביר כעת, למה אי-אפשר לעשות פחות מ-180 משאיות. קודם כל חייבים 100 משאיות על מנת להעביר שולחנות. בכל המשאיות האחרות, לפי בדיקת המקרים שעשינו, כל ארון תופס מקום שהיה אפשר לשים בו שני ספסלים. לכן במשאיות שמובילות שולחנות, כדאי לשים ארון וספסל. אז אחרי 100 משאיות שמובילות שולחן, ארון וספסל נותר להעביר 100 ארונות ו-200 ספסלים, וכל ארון יכול לבוא במקום שני ספסלים, אז זה כמו להעביר 400 ספסלים שזה דורש 80 משאיות.

6. בתמונה מנעול קוד בכניסה לבניין:



הקוד מורכב מספרות $1,2,3,4,5,6,7,8,9$, כל ספרה מופיעה בדיוק פעם אחת. פושעים גילו שבעת הקשת הקוד הנכון, תמיד עוברים מכפתור לכפתור סמוך לפי צלע (למשל, מ-4 אפשר לעבור ל-7, אבל אי אפשר לעבור ל-6 ואי אפשר לעבור ל-8). תוך כמה ניסיונות הפושעים יצליחו לפרוץ את המנעול בוודאות?



פתרון. נצבע את הכפתורים בשני צבעים, כמו לוח שח (ראו ציור). אז בהקלדה תמיד עוברים מכפתור שחור ללבן או להפך. לכן מבין 8 הכפתורים האחרונים בקוד יש אותה כמות של שחורים ולבנים, ובסה"כ יש יותר לבנים, לכן חייבים להתחיל מכפתור לבן.

הכפתור הראשון בקוד יכול להיות:

[א] פינתי (1, 3, 5 או 7),

[ג] או במרכז (5).

אנחנו נספור לכל סוג של התחלה בנפרד לכמה אפשרויות זה מוביל, וכמובן במקרה א' צריך להכפיל ב-4.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'
שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

[א] אם הכפתור הראשון הוא פינתי (נגיד 1, כי כל המצבים האלה סימטריים) אז יש שתי אפשרויות לכפתור השני ושני ההמשכים סימטריים ביחס לאלכסון, אז נגיד שהכפתור השני הוא 2. מכאן יש שני המשכים אפשריים: לפינה אחרת או למרכז, בדוגמה שלנו 3 או 5.

[א1] אם התלנו בכפתורים 1, 2, 3 בסדר זה אז ממשיכים ל-6 כי אי-אפשר לחזור ל-2 שוב, ומכאן שתי אופציות: להמשיך ל-5 או ל-9.

(i) אם התחלת הקוד היא 1 2 3 6 9, אחרי זה ניתן להמשיך רק ל-8, ואז ניתן לסיים בשתי דרכים שונות: 5 4 7 או 7 4 5.

(ii) אם התחלת הקוד היא 1 2 3 6 5, יש רק המשך אפשרי אחד. הרי 9 יכול להיות רק בסוף כי ממנו אי-אפשר להמשיך, ולפניו צריך לבוא 8 לכן לפניו צריך להיות 7 ולפניו 6.

כלומר במקרה זה יש 3 המשכים אפשריים.

[א2] אם התלנו בכפתורים 1, 2, 5 אז ההמשך הוא חד משמעי. אכן, 3 חייב להיות בסוף כי ממנו לא ניתן להמשיך ולפניו חייה להיות 6 ולפניו חייב להיות 9 ולפניו 8 ולפניו 7 ולפניו 6.

ובכן במקרה שמתחילים ב-1 ואז 2 יש $3+1=4$ המשכים אפשריים. כמובן יש 8 התחלות מסוג זה, כי יש 4 דרכים לבחור קודקוד פינתי ובכל אחד מהמקרים האלה יש שתי דרכים לעשות את המהלך השני, אז יש $8\cdot 4=32$ קודים אפשריים שמתחילים בפינה.

[ב] נניח שמתחילים במרכז – הכפתור 5, ואז ממשיכים לכיוון של אחת הצלעות - נגיד 2, אבל יש 4 אפשרויות מסוג זה שסימטריות זו לזו. אחרי זה יש שתי אפשרויות 0 להתחיל לעבור על ההיקף לפי כיוון השעון או נגד כיוון השעון, והחל מהספרה השלישית הקוד הוא חד-משמעי.

ובכן, יש 8 מקרים מסוג זה.

בסה"כ יש $32+8=40$ מקרים.