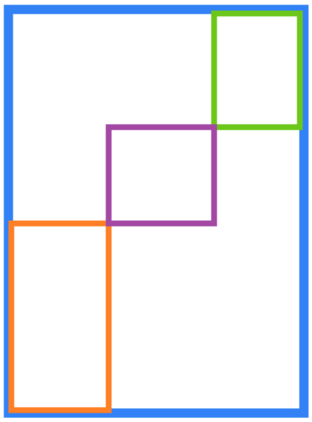
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'

שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות



בעיה 1.
היקף המלבן הכחול 77 מטרים, היקף המלבן הכתום – 14 מטרים, היקף המלבן הירוק – 23 מטרים. חשבו את היקף המלבן הסגול.

תשובה. 40.

פתרון.
סכום הרוחב של המלבן הכתום, המלבן הסגול והמלבן הירוק שווה לרוחב המלבן הכחול. גם סכום הגובה של המלבן הכתום, המלבן הסגול והמלבן הירוק שווה לגובה המלבן הכחול. כיוון שהיקף הוא פעמיים גובה פלוס פעמיים רוחב, שוויון כזה מתקיים גם להיקפים. לכן היקף המלבן הסגול ועוד $23+14$ שווה ל-77. לכן היקף המלבן הסגול שווה ל-$77-37$ שזה שווה ל-40.

בעיה 2.
במסיבת יום הולדת של מירי היו 34 בלונים מ-7 צבעים (לפחות אחד מכל צבע), ומכל צבע היה מספר שונה של בלונים. לא היה אף צבע שממנו היו בדיוק 4 או בדיוק 8 בלונים. מבין כל הצבעים, היו הכי הרבה בלונים כחולים. כמה בלונים כחולים היו?

תשובה. 10

פתרון.
מכיוון שיש 7 צבעים, ומספר שונה של בלונים מכל צבע, אז כמויות של בלונים בצבעים שונים הם לפחות 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 (הרי אמרו גם שזה לא 4 או 8), והסכום במקרה זה הוא

$$1+2+3+5+6+7+9=(1+7)+(2+6)+(3+7)+9=$$
$$=8+8+8+9=8\cdot 4+1=33$$

כיוון שיש בדיוק 34 בלונים, צריך להגדיל את מספר הבלונים באחד הצבעים ב-1, והדרך היחידה לעשות את זה בלי להשתמש ב-4 או ב-8, זה להחליף את 9 ב-10.

כלומר מהצבע שיש ממנו הכי הרבה, יש 10 בלונים.

בעיה 3.

לאביחי, בנימין וגפן יש 42 סוכריות שוקולד ו-25 סוכריות גומי. כל הסוכריות יחד שוקלות 1215 גרם. הילדים חילקו ביניהם את הסוכריות כך שכל אחד קיבל שליש מהמשקל הכולל. גפן קיבלה 15 סוכריות שוקולד ו-7 סוכריות גומי. כמה שוקלת סוכריית שוקולד אחת?

תשובה. 20

פתרון.

אם נכפיל את המשקל שגפן קיבלה ב-3, זה כמו 45 סוכריות שוקולד ועוד 21 סוכריות גומי. מצד שני, זה אמור להיות כמו כל מה שיש, כלומר 42 סוכריות שוקולד ו-25 סוכריות גומי, ומצד שלישי נתון שזה 1215 גרם. מכאן ניתן להסיק כי 3 סוכריות שוקולד שוקלות כמו 4 סוכריות גומי (הרי לו היו 3 סוכריות שוקולד יותר ו-4 סוכריות גומי פחות, היינו מקבלים אותו משקל).

לכן $42=3\cdot 14$ סוכריות שוקולד שוקלות כמו $56=4\cdot 14$ סוכריות גומי. לכן המשקל הכולל הוא כמו של $25+56=81$ סוכריות גומי. לכן משקל של סוכרית גומי שווה ל- $\frac{1215}{81}=15$ גרמים. לכן 4 סוכריות גומי שוקלות 60 גרמים, וכך גם 3 סוכריות שוקולד, לכן סוכרית שוקולד שוקלת 20 גרמים.

בעיה 4.

מלך שלח חמישה משרתים לספור את כמות הכבשים בממלכה. הדיווחים שהוא קיבל מהמשרתים היו:

- מספר הכבשים מתחלק ב-5;
- מספר הכבשים מתחלק ב-10;
- מספר הכבשים מתחלק ב-20;
- מספר הכבשים מתחלק ב-25;
- מספר הכבשים מתחלק ב-40.

ידוע שבדיוק שניים מהדיווחים שגויים, ושמספר הכבשים בממלכה קטן מ-100. מה מספר הכבשים הגדול ביותר האפשרי בממלכה?

פתרון.

המשרת שדיבר על התחלקות ב-10 צודק, כי אם הוא טעה אז גם האלה שאמרו 20 ו-40 טעו, ונתון שרק שניים טעו ולא שלושה. בגלל שהמספר מתחלק ב-10, אז גם הזה שאמר "5" צדק.

לא יתכן שמי שאמר "40" צדק, כי אז כולם חוץ מאחד בוודאות צדקו, בניגוד להנחה ששניים טעו.

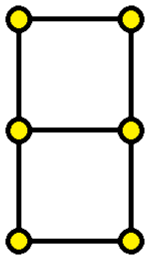
לכן מבין האנשים שאמרו "20" ו-"25" אחד צדק ואחד טעה.

אם זה שאמר "20" צודק, אז מספר הכבשים הוא 20 או 60 (כי זה לא מתחלק ב-40).

אם זה שאמר "25" צודק, אז מספר הכבשים הוא 50 (כי זה חייב להתחלק ב-10).

לכן הכי הרבה שיכול להיות הוא 60.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'</u>
שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות



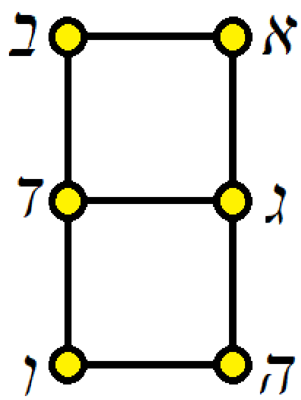
<u>בעיה 5.</u>

במדינה רחוקה 6 ערים המחוברות בכבישים כמתואר בציור. המלך רוצה לסגור חלק מהכבישים (לפחות כביש אחד) כך שעדיין יהיה אפשרי להגיע מכל עיר לכל עיר אחרת. בכמה דרכים המלך יכול לעשות זאת?

<u>תשובה.</u> 22

<u>פתרון.</u>

ניתן שמות לערים, כמו בציור:



אפשר לחלק את כל הכבישים לשלושה מסלולים, שמובילים מעיר ג' לעיר ד':

- ג'-א'-ב'-ד'
- ג'-ה'-ו'-ד'
- ג'-ד' (כביש ישיר)

בכל מסלול ניתן לסגור כביש אחד לכל היותר, אחרת לא ניתן להגיע לערים באמצע המסלול. כמו כן לא ניתן לסגור כביש בכל מסלול, כי אז לא ניתן להגיע מעיר ג' לעיר ד'.

לכן או שסוגרים **כביש אחד** כלשהו (ולזה יש **7 אפשרויות**);

או שסוגרים **שני כבישים** ממסלולים שונים, שזה אומר:

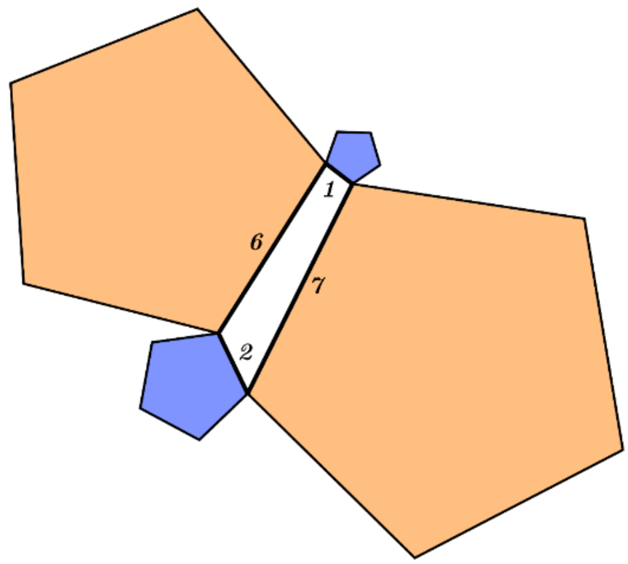
- או שסוגרים כביש ישיר ג'-ד' וכביש נוסף כלשהו, ולזה יש 6 אפשרויות,
- או שסוגרים כביש אחד מהמסלול ג'-א'-ב'-ד' וכביש אחר מהמסלול ג'-ה'-ו'-ד', ולזה יש $3\cdot 3$ אפשרויות

סה"כ $\mathbf{9+6=15}$ אפשרויות לסגור שני כבישים.

כלומר יש $15+7=22$ אפשרויות בסה"כ.

בעיה 6.

בתמונה מרובע שאורכי צלעותיו $1, 6, 2, 7$. על כל צלע בונים כלפי חוץ מחומש משוכלל. חשבו פי כמה השטח הכתום גדול מהשטח הכחול.



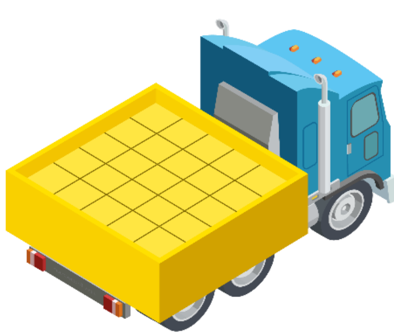
תשובה. 17

פתרון.

גודל של מחומש עם צלע a הוא $k \cdot a^2$. לכן כתום חלקי כחול שווה ל-

$$\frac{k \cdot 7^2 + k \cdot 6^2}{k + k \cdot 2^2} = \frac{49 + 36}{1 + 4} = \frac{85}{5} = 17$$

בעיה 7.



לגבי יש משאית בצורת ריבוע 5×5 (ראו ציור):

הוא רוצה להעביר בה 300 ספסלים בגודל 1×5
200 ארונות בגודל 4×2
ו-100 שולחנות בגודל 3×3.

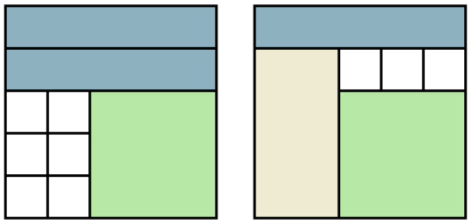
מהו המספר הקטן ביותר של נסיעות עם הרהיטים שגבי יצטרך לעשות, כדי להעביר את כל כולם?

הערה: הרהיטים צריכים לעמוד על המשבצות בצורה מדויקת.

תשובה. 180

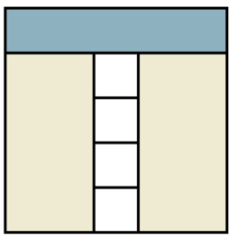
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה'

שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

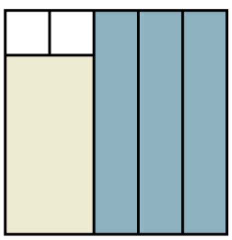


פתרון.

נשים לב כי על המשאית ניתן להעלות רק שולחן אחד, כי לא משנה איך מניחים אותו הוא תופס את המשבצת המרכזית.

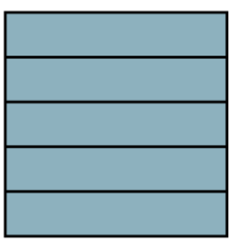


אם מכניסים שתי ארונות, אז לא יתכן שאחר מהן לרוחב והשני לרוחב. הרי אם ארון אחד נמצא בשתי שורות ומפספס רק עמודה אחת, וארון אחר נמצא בשתי עמודות ומפספס רק שורה אחת, ישנה שורה של ארון ראשון שגם ארון שני פוגש אותה, ובאותה שורה צריכים להיות שתי משבצות של ארון אחד ו-4 משבצות של ארון אחר אבל 5 משבצות בסה"כ.



אם על המשאית יש שולחן, אז ניתן להניח רק ארון אחד לאורך או לרוחב, אבל אי-אפשר גם וגם. אם שמים ארון אחד לאורך נגיד, אז כבר בכל עמודה יש משבצת תפוסה, אז אפשר להוסיף רק ספסל לרוחב (אבל רק אחד).

אם יש שולחן ואין ארון, אפשר להוסיף עד שני ספסלים באותו כיוון, הרי אין מצב שיש ספסל לרוחב וספסל לרוחב.



אם יש שני ארונות, כמו שכבר אמרנו הם חייבים להיות באותו כיוון. במקרה זה ניתן להוסיף רק ספסל אחד, לאורך או לרוחב.

אם יש ארון אחד, אז ניתן להוסיף 3 ספסלים באותו כיוון, או ספסל אחד בכיוון האחר, אז עדיף כבר 3 באותו הכיוון.

אם אין לא ארון אז אפשר לשים עד 5 ספסלים.

בכל מקרה, בכל המקרים שראינו, אם אין שולחן אז על כל ארון שמורידים אפשר לשים שני ספסלים.

נסביר כיצד להסתפק ב-180 משאים.

- 100 משאיות עם שולחן, ארון וספסל.
- 50 משאיות נוספות עם שני ארונות וספסל
- 30 משאיות נוספות עם 5 ספסלים בכל משאית.

נסביר בעת, למה אי-אפשר לעשות פחות מ-180 משאיות. קודם כל חייבים 100 משאיות על מנת להעביר שולחנות. בכל המשאיות האחרות, לפי בדיקת המקרים שעשינו, כל ארון תופס מקום שהיה אפשר לשים בו שני ספסלים. לכן במשאיות שמובילות שולחנות, כדאי לשים ארון וספסל. אז אחרי 100 משאיות שמובילות שולחן, ארון וספסל נותר להעביר 100 ארונות ו-200 ספסלים, וכל ארון יכול לבוא במקום שני ספסלים, אז זה כמו להעביר 400 ספסלים שזה דורש 80 משאיות.