



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג' שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

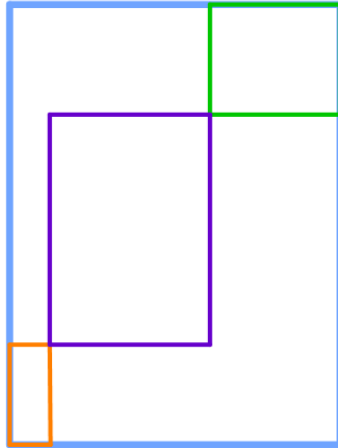
בעיה 1.

היקף המלבן הכחול 77 מטרים, היקף המלבן הכתום – 14 מטרים, היקף המלבן הירוק – 23 מטרים. חשבו את היקף המלבן הסגול.

תשובה. 40.

פתרון.

סכום הרוחב של המלבן הכתום, המלבן הסגול והמלבן הירוק שווה לרוחב המלבן הכחול. גם סכום הגובה של המלבן הכתום, המלבן הסגול והמלבן הירוק שווה לגובה המלבן הכחול. כיוון שהיקף הוא פעמיים גובה פלוס פעמיים רוחב, שוויון כזה מתקיים גם להיקפים. לכן היקף המלבן הסגול ועוד $23 + 14$ שווה ל-77. לכן היקף המלבן הסגול שווה ל- $77 - 37$ שזה שווה ל-40.



בעיה 2.

טור ברווזונים שוחה באגם. מתוכם אחד שחור, אחד לבן, והשאר צהובים. מספר הברוזונים הנמצאים אחרי הברוזון הלבן שווה למספר הברוזונים הנמצאים לפניו. מספר הברוזונים הנמצאים אחרי הברוזון השחור קטן פי שתיים ממספר הברוזונים הנמצאים לפניו. בין הברוזון הלבן לברוזון השחור יש שלושה ברווזונים נוספים. כמה ברווזונים יש בטור בסך הכל?

תשובה. 25.

פתרון.

ברוזון שחור נמצא מאחורי ברווזון לבן, כי הלבן באמצע והשחור רואה שרוב הברוזונים לפניו.



מכיוון שמאחורי הברוזון הלבן יש לפחות 4 ברווזונים (השחור ו-3 שנמצאים ביניהם), אז גם לפניו יש לפחות ארבעה, – כי בשני הצדדים שלו יש אותה כמות. נניח שלברוזונים שנמצאים לפני הברוזון הלבן קוראים אבי, בני, גדי ודני בסדר זה. מכיוון שכמות הברוזונים שנמצאים לפני ואחרי הברוזון הלבן זהה, כמות הברוזונים לפני דני שווה לכמות הברוזונים מאחורי השחור.

מספר הברוזונים מאחורי השחור כפול 2 שווה למספר הברוזונים לפניו; זה כולל את הברוזונים לפני דני ואת 8 הברוזונים לפני הברוזון השחור עד דני. אבל כיוון שכמות הברוזונים מאחורי השחור ולפני דני זהה, אז חוץ מהברוזון השחור ניתן לחלק את הברוזונים ל-3 חלקים שווים: מאחורי השחור, לפני דני, ועוד 8. לכן חוץ מהברוזון השחור יש $24 = 3 \cdot 8$ ברווזונים, וסה"כ יש 25 ברווזונים.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג' שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

בעיה 3.

נקרא למספר מפואר, אם המספר קטן יותר מסכום כל המחלקים שלו חוץ מעצמו. מצאו את המספר המפואר הקטן ביותר.

תשובה. 12

פתרון.

נשים לב כי סכום המחלקים של 12 זה $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

נבדוק האם יש מספר קטן יותר מ-12. כמובן מספרים ראשוניים לא מתאימים, וגם 1 לא מתאים. לכן 1, 2, 3, 5, 7, 11 לא מתאימים.

גם חזקות של 2 לא מתאימות, כולל 4, 8 מכיוון ש- $1 + 2 < 4$, וכן $1 + 2 + 4 < 8$.

מה שנשאר זה 6, 9, 10.

נשים לב שאם יש $2 \cdot p$ כאשר p מספר ראשוני סכום מחלקיו הוא $1 + 2 + p$ שזה קטן או שווה למספר עצמו. זה מכסה את המקרים 6 ו-10.

נשים לב כי סכום המחלקים של 9 זה $1 + 3$. ובזה סיימנו את בדיקת כל המקרים שקטנים מ-12.

בעיה 4.

במסיבת יום הולדת של מירי היו 34 בלונים מ-7 צבעים (לפחות אחד מכל צבע), ומכל צבע היה מספר שונה של בלונים. לא היה אף צבע שממנו היו בדיוק 4 או בדיוק 8 בלונים. מבין כל הצבעים, היו הכי הרבה בלונים כחולים. כמה בלונים כחולים היו?

תשובה. 10

פתרון.

מכיוון שיש 7 צבעים, ומספר שונה של בלונים מכל צבע, אז כמויות של בלונים בצבעים שונים הם לפחות 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 (הרי אמרו גם שזה לא 4 או 8), והסכום במקרה זה הוא

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 &= (1 + 7) + (2 + 6) + (3 + 7) + 9 = \\ &= 8 + 8 + 8 + 9 = 8 \cdot 4 + 1 = 33 \end{aligned}$$

כיוון שיש בדיוק 34 בלונים, צריך להגדיל את מספר הבלונים באחד הצבעים ב-1, והדרך היחידה לעשות את זה בלי להשתמש ב-4 או ב-8, זה להחליף את 9 ב-10.

כלומר מהצבע שיש ממנו הכי הרבה, יש 10 בלונים.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג' שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

בעיה 5.

מלך שלח חמישה משרתים לספור את כמות הכבשים בממלכה. הדיווחים שהוא קיבל מהמשרתים היו:

- מספר הכבשים מתחלק ב-5;
- מספר הכבשים מתחלק ב-10;
- מספר הכבשים מתחלק ב-20;
- מספר הכבשים מתחלק ב-25;
- מספר הכבשים מתחלק ב-40.

ידוע שבדיוק שניים מהדיווחים שגויים, ושמספר הכבשים בממלכה קטן מ-100. מה מספר הכבשים הגדול ביותר האפשרי בממלכה?

תשובה. 60

פתרון.

המשרת שדיבר על התחלקות ב-10 צודק, כי אם הוא טעה אז גם האלה שאמרו 20 ו-40 טעו, ונתון שרק שניים טעו ולא שלושה. בגלל שהמספר מתחלק ב-10, אז גם הזה שאמר "5" צדק.

לא יתכן שמי שאמר "40" צדק, כי אז כולם חוץ מאחד בוודאות צדקו, בניגוד להנחה ששניים טעו.

לכן מבין האנשים שאמרו "20" ו-"25" אחד צדק ואחד טעה.

אם זה שאמר "20" צודק, אז מספר הכבשים הוא 20 או 60 (כי זה לא מתחלק ב-40).

אם זה שאמר "25" צודק, אז מספר הכבשים הוא 50 (כי זה חייב להתחלק ב-10).

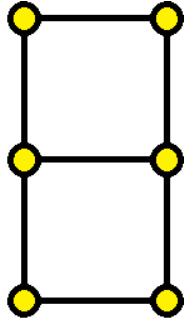
לכן הכי הרבה שיכול להיות הוא 60.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג'
שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

בעיה 6.

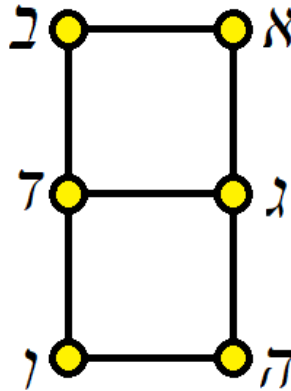
במדינה רחוקה 6 ערים המחוברות בכבישים כמתואר בציור. המלך רוצה לסגור חלק מהכבישים (לפחות כביש אחד) כך שעדיין יהיה אפשרי להגיע מכל עיר לכל עיר אחרת. בכמה דרכים המלך יכול לעשות זאת?



תשובה 22.

פתרון.

ניתן שמות לערים, כמו בציור:



אפשר לחלק את כל הכבישים לשלושה מסלולים, שמובילים מעיר ג' לעיר ד':

- ג'-א'-ב'-ד'
- ג'-ה'-ו'-ד'
- ג'-ד' (כביש ישיר)

בכל מסלול ניתן לסגור כביש אחד לכל היותר, אחרת לא ניתן להגיע לערים באמצע המסלול. כמו כן לא ניתן לסגור כביש בכל מסלול, כי אז לא ניתן להגיע מעיר ג' לעיר ד'.

לכן או שסוגרים **כביש אחד** כלשהו (ולזה יש **7 אפשרויות**);

או שסוגרים **שני כבישים** ממסלולים שונים, שזה אומר:

– או שסוגרים כביש ישיר ג'-ד' וכביש נוסף כלשהו, ולזה יש 6 אפשרויות,

– או שסוגרים כביש אחד מהמסלול ג'-א'-ב'-ד' וכביש אחר מהמסלול ג'-ה'-ו'-ד', ולזה יש $3 \cdot 3$ אפשרויות

סה"כ $15 = 6 + 9$ אפשרויות לסגור שני כבישים.

כלומר יש $22 = 15 + 7$ אפשרויות בסה"כ.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג'
שלב א, שנת תשפ"ג – פתרונות

בעיה 7.

בדירה יש שלושה חדרים: סלון, חדר שינה וחדר עבודה,
ו-4 חתולים: הלבן, השמן, הרזה והפרוותי.
אם החתול הפרוותי נמצא בחדר עם החתול הלבן, אז אסור שהחתול השמן יהיה באותו החדר איתם.
בכל יום החתולים רוצים להתמקם בחדרים בסידור שעוד לא נוצר קודם. כמה ימים יעברו עד שהחתולים
יאלצו לחזור על סידור שכבר היה? מותר שיהיו חדרים ריקים.

תשובה. 72

פתרון.

בעצם אסור ש-3 החתולים: הלבן, הפרוותי והשמן יהיו באותו חדר.
בסה"כ יש $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$ אפשרויות לבחור חדר לכל חתול, אבל צריך להחסיר את המקרים ש-
3 החתולים האלה באותו החדר.
בשביל לספור את המקרים האסורים: צריכים לבחור חדר ל-3 החתולים האלה, וחדר (אולי אותו החדר)
לחתול הרזה, וזה $3 \cdot 3 = 9$ מקרים אסורים. כלומר מספר האפשרויות הוא $81 - 9 = 72$ וזו גם כמות
הימים.