



## Всеизраильская математическая олимпиада – 8-9 классы

### Финал, 5783 год

1. Обозначьте на плоскости 8 точек так, чтобы для каждой точки были 4 точки, которые находятся на расстоянии 2, 3, 4 и 5 от этой точки.

2. На площади по кругу расположены лавки 100 торговцев, у каждого из которых есть определённое количество монет. Каждый продавец продаёт рыбу по своей, постоянной цене. У каждого торговца есть доступ к бесконечному количеству рыбы. Однажды один из торговцев нашёл золотую удочку. Каждый день после этого торговец с золотой удочкой идёт к следующему по кругу торговцу, передаёт ему удочку, а потом покупает у него столько рыбы, на сколько у него хватает денег. Если в определённый день он не может купить рыбы вообще, этот день называется *грустным*.

Докажите, что если 2022-й день грустный, то и 2023-й тоже будет грустным.

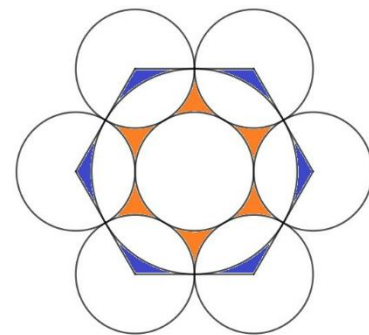
3. Для какого наименьшего простого числа  $p > 10$  число

$$|105 - 2p|$$

составное?

4. На рисунке изображены 7 касающихся окружностей одинакового размера, шестиугольник, который образуется после соединения центров шести из них, и окружность, вписанная в этот шестиугольник.

Докажите, что оранжевая площадь равна синей.



5. В культурном центре проходят  $N$  кружков. В каждом кружке принимают участие несколько учеников. Известно, что никакие два ученика не принимают участия в одинаковом наборе кружков, и каждый ученик посещает как минимум один кружок. Два ученика называются *друзьями*, если они ходят на общий кружок. Известно, что если ученик А друг ученика Б, а ученик Б друг ученика В, то ученик А друг ученика В.

Чему равно максимальное количество учеников, посещающих кружки в культурном центре? Ответ может зависеть от  $N$ .

6. Найдите все решения в положительных числах:

$$\begin{cases} x^2 + xy = z \\ y^2 + yz = x \\ z^2 + zx = y \end{cases}$$

7. В равностороннем треугольнике  $ABC$  точка  $D$  расположена на отрезке  $AB$  так, что  $AD = \sqrt{3}BD$ , а точка  $E$  – на отрезке  $AC$  так, что  $\sqrt{3}CE = 2AE$ . Прямая  $DE$  пересекает продолжение стороны  $BC$  в точке  $F$ .

Вычислите градусную меру угла  $\angle DFB$ .

**בהצלחה!**