האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב הגמר, שנת תשפ"ג

1. (מריה גרינגלז) אסף, בר, גיורא ודרור - אחים, וכולם תושבים בארץ השקרנים ודוברי אמת.

שקרנים תמיד משקרים ודוברי אמת תמיד אומרים את האמת.

יום אחד אסף אמר: "מבין ארבעתנו, לפחות שניים - שקרנים"

ואז בר אמרה: "לפחות שלושה מאתנו שקרנים"

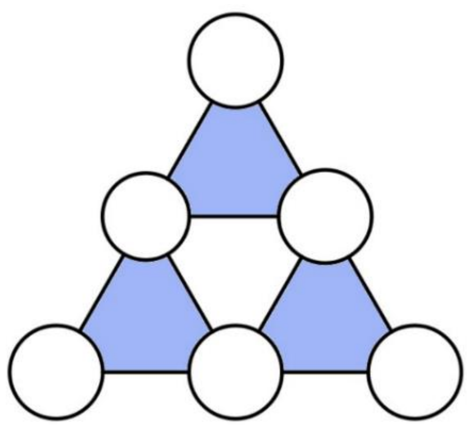
כמה שקרנים יש בין ארבעת האחים?

פתרון: נשים לב שאם בר צדקה אז גם אסף צדק ולכן מבין האחים יש לפחות שני דוברי אמת (אסף ובר), בסתירה לאמירה של בר.

נסיק שבר שיקרה. אם גם אסף שיקר אז בר ואסף שקרנים ולכן יש לפחות שני שקרים בסתירה להנחה שאסף שיקר.

סך הכל קיבלנו שאסף אמר את האמת ובר שיקרה ולכן יש לפחות שני שקרנים אבל פחות מ-3 ולכן יש בדיוק שני שקרנים.

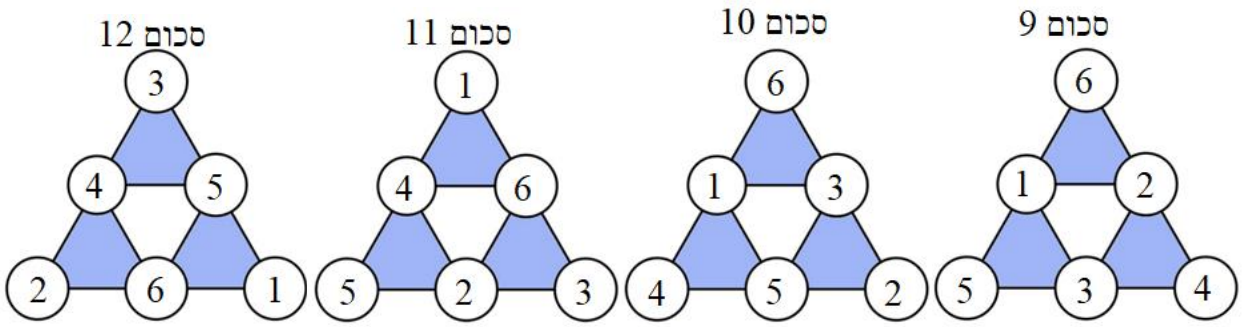
2. (איתי זילברברג) אביחי הציב את המספרים 1,2,3,4,5,6 בתוך העיגולים, כל מספר פעם אחת בדיוק. התברר שהסכומים בשלושת המשולשים הכחולים יצאו שווים. מצאו את כל האפשרויות לסכומים אלו.
לכל אפשרות, תנו דוגמה להצבה של המספרים והוכיחו שאין אפשרויות נוספות.



פתרון ראשון: נתבונן במשולש כחול שמכיל את המספר 6. שני המספרים האחרים במשולש זה הם לפחות 1,2 ולכן הסכום במשולש זה הוא לפחות 9. כלומר לא ניתן לקבל שהסכומים בכל המשולשים הכחולים יהיו הקטנים מ-9.
נתבונן במשולש כחול שמכיל את המספר 1. שני המספרים האחרים במשולש זה הם לכל היותר 5,6 ולכן הסכום במשולש זה לא עולה על 12. כלומר לא ניתן לקבל שהסכומים בכל המשולשים הכחולים יהיו הגדולים מ-12.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'
שלב הגמר, שנת תשפ"ג

אנו טוענים שניתן לקבל את כל הסכומים בין 9 ל-12.
נבנה דוגמה לכל אחת מהסכומים האפשריים:



<u>פתרון שני:</u> נראה הסבר איך לכך שהסכומים חייבים להיות בין 9 ל-12. הדוגמאות למשולשים זהות לדוגמאות בפתרון הקודם.

נסמן את סכום המספרים במשולש הכחול ב-${\color{blue}\boldsymbol{\Delta}}$ ואת סכום המספרים במשולש הלבן ב-$\boldsymbol{\Delta}$.
אם נסכום את שלושת הסכומים במשולשים הכחולים נקבל את סכום של ששת המספרים בעיגולים הכחולים ועוד סכום המספרים במשולש הלבן, הרי המספרים בקודקודים של המשולש הלבן נספרים פעמיים. כלומר

$$3\cdot{\color{blue}\boldsymbol{\Delta}}=1+2+3+4+5+6+\boldsymbol{\Delta}=21+\boldsymbol{\Delta}$$

סכום המספרים המינימלי במשולש הלבן מתקבל כאשר נציב בו את המספרים 1,2,3 והסכום המקסימלי מתקבל כאשר נציב את המספרים 4,5,6 ולכן $6\le\boldsymbol{\Delta}\le 15$. נסיק ש-$9\le{\color{blue}\boldsymbol{\Delta}}\le 12$.

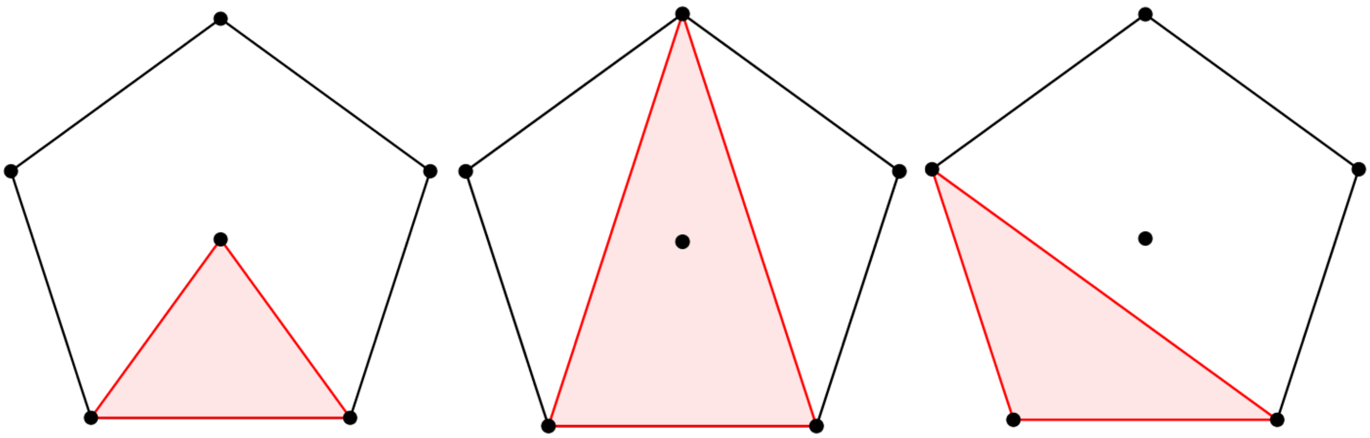
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'

שלב הגמר, שנת תשפ"ג

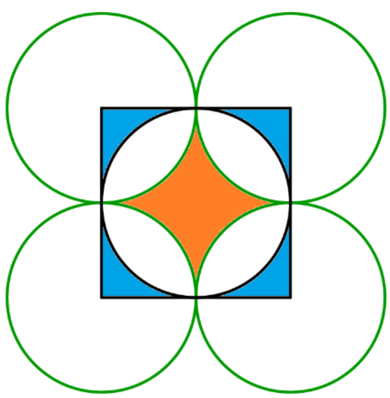
3. (אמתי לוי) סמנו 6 נקודות במישור כך שכל 3 מהן יוצרות משולש שווה-שוקיים.

<u>פתרון:</u> מחומש משוכלל ומרכזו מספקים את הבנייה הרצויה.

נוצרים שלושה סוגים של משולשים ושלושת שווי שוקיים.



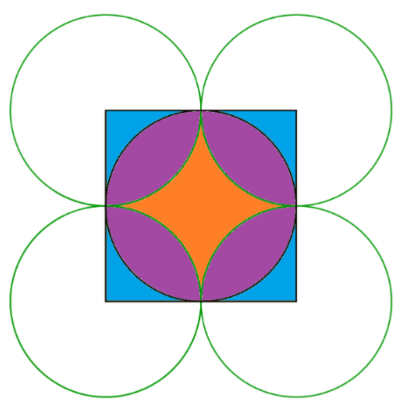
4. (דניאל קנר) נתונים ארבעה מעגלים ירוקים בגודל זהה שמשיקים זה לזה כמתואר בציור. מרכזי המעגלים יוצרים ריבוע. איזה שטח גדול יותר: הכחול או הכתום?



<u>פתרון ראשון:</u> תחילה נשים לב שצלע הריבוע מורכבת משני רדיוסים של המעגלים הירוקים אבל צלע הריבוע כמובן שווה לקוטר המעגל החסום בתוך הריבוע ולכן נוכל להסיק שהמעגל החסום בריבוע שווה בגודלו למעגלים הירוקים.

נוכיח שהשטח הכחול שווה לשטח הכתום. לשם כך מספיק להוכיח ש-

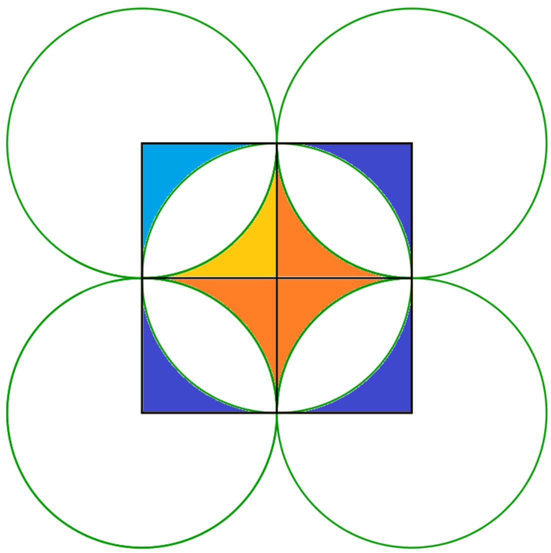
השטח הכחול+השטח הסגול=השטח הכתום+השטח הסגול



השטח הכתום+ השטח הסגול=שטח של עיגול ירוק.

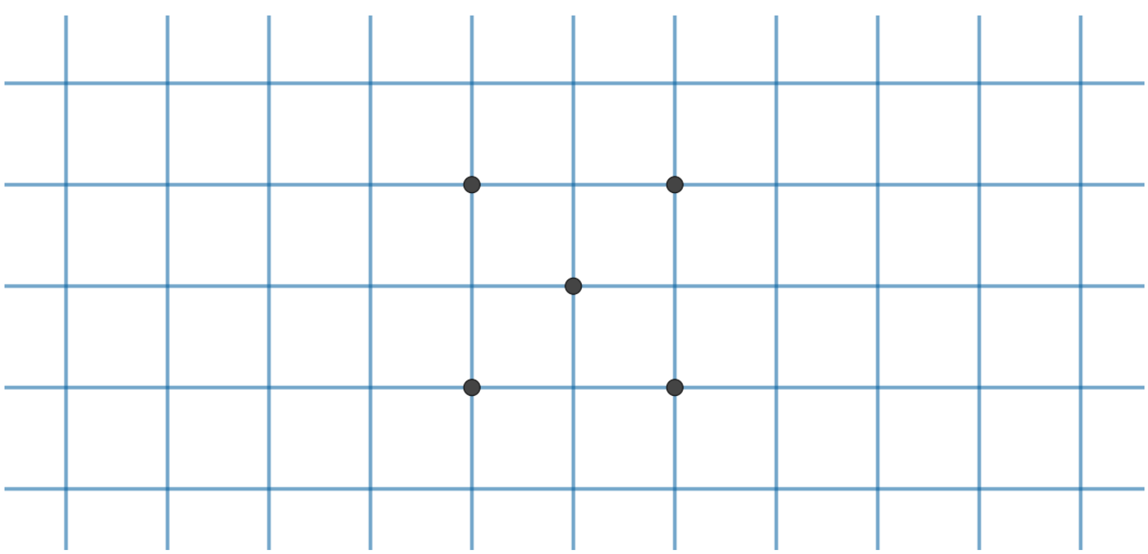
השטח הכחול+השטח הסגול מורכב מארבעה רבעים של עיגול ירוק ולכן גם הוא שווה לשטח של עיזול ירוק, כרצוי.

<u>פתרון שני:</u> נעביר את קטעי האמצעים בריבוע כך שהריבוע יחולק לארבעה ריבועים קטנים יותר.

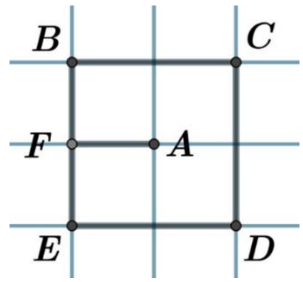


נשים לב שבכל רבע של הריבוע מתקבל ציור סימטרי שבו בברור השטח הכתום שווה לשטח הכחול (ברבע שמאלי העליון השטח הצהוב שווה לשטח התחלת) ולכן גם סך הכל השטח הכתום שווה לשטח הכחול.

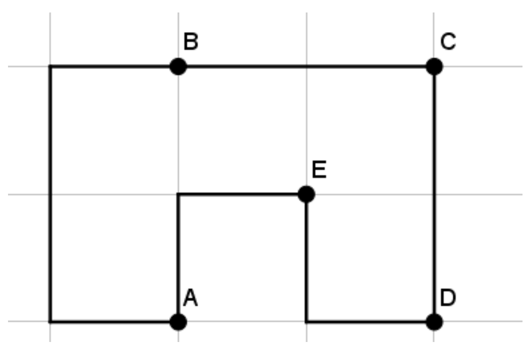
5. (מריה גרינגלז) ציירו מצולע על קווי המשבצות בעל היקף מינימלי, העובר בחמשת הנקודות השחורות. הוכיחו כי אין מצולע עם היקף קטן יותר.



הערה: למצולע אסור לחתוך את עצמו. לדוגמה המסלול $AFBCDEFA$ אינו מצולע, כלומר הציור הבא אינו חוקי:

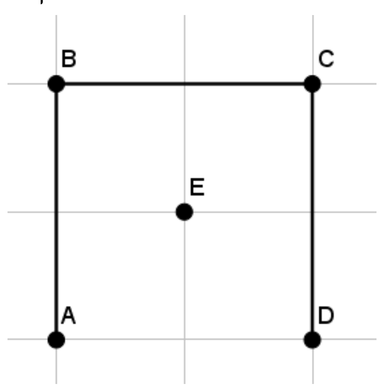


תשובה: ההיקף המינימלי האפשרי הוא 12. דוגמה למצולע כזה:



פתרון: ברור שאורך המסלול בין כל שתי נקודות מסומנות זוגי ולכן הוא לפחות 2 וכבר קיבלנו שאין מצולעים עם היקף שקטן מ-10. היקף 11 לא אפשרי כי, כפי שאמרנו, כל המצולע מורכב מחמישה מסלולים באורכים זוגיים. נשאר לפסול את המקרה של היקף 10.

נניח בשלילה שקיים מצולע עם היקף 10.מצולע זה עושה מסלול באורך 2 בדיוק בין כל שתי נקודות מסומנות. יש שני סוגי מסלולים, בין נקודה פנימית לנקודה חיצונית-יש שניים כאלו, ובין שתי נקודות חיצוניות-יש שלושה מסלולים כאלו. נניח בלי הגבלת הכלליות ש-A מחובר עם מסלול באורך 2 ל-B, B מחובר עם מסלול באורך 2 ל-C ו-C מחובר עם מסלול באורך 2 ל-D.



E אמור להתחבר ל-A ו-D עם מסלולים באורך 2 אבל בלתי אפשרי לעשות זאת בלי ליצור חיתוך עצמי של המצולע.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ו'-ז'</u>

שלב הגמר, שנת תשפ"ג

6. (דניאל קנר) במחסן היו חמישה שקי קמח ששקלו 1,2,3,4,4 קילוגרמים ועל כל שק רשום המשקל שלו. איתי בחר שני שקים והעביר משקל מסוים משק אחד לשני. הסבירו כיצד באמצעות שלוש שקילות על מאזני כף ניתן לגלות איזו העברה עשה איתי.
הערה: יתכן שאיתי העביר כמות לא שלמה של קילוגרמים.

<u>פתרון:</u> בשאלות מסוג זה נוח לחשוב על כמות האפשרויות השונות למשקלים של השקים.

במקרה שלנו יש 5 אפשרויות לשק שנהיה יותר קל ו-4 אפשרויות לשק שנהיה יותר כבד, סך הכל יש 20 דברים שונים שאיתי יכול היה לעשות עם השקים.

בכל שקילה על המאזניים אנחנו יכולים לקבל אחת מ-3 אפשרויות, הצד השמאלי כבד יותר, הצד הימני כבד יותר או ששני הצדדים שווים. כלומר בכל שקילה אנחנו מחלקים את האפשרויות להעברות של הקמח ל-3 קבוצות. כאשר אנחנו מתכננים שקילה המטרה שלנו היא לחלק את האפשרויות שווה בשווה (כמה שאפשר).

השיקול של כמות אפשרויות עוזר לפסול שקילות לא מוצלחות, לדוגמה אם הגענו למצב שנשארה לנו שקילה אחת ועדיין רוצים להבדיל בין ארבעה מצבים הרי ברור שאין זה אפשרי.

לאחר הקדמה אידיאולוגית נעבור לפתרון:

בשביל להבדיל בין השקים של 4 קילוגרמים נקרא לאחד מהם 4 ולשני $4'$.

בשקילה הראשונה נשקול את 1,2,4 מול $3,4'$.

מקרה 1: צד שמאל כבד יותר, במקרה זה השק הכבד הוא 3 או $4'$ והשק הקל הוא אחד מבין 1,2,4.

מקרה 2: שני הצדדים שווי משקל, במקרה זה או שאיתי נגע בשקים 3 ו-$4'$ או בשניים מהשקים 1,2,4.

מקרה 3 צד ימין כבד יותר, במקרה זה השק הכבד הוא אחד מבין 1,2,4 והשק הקל הוא 3 או 4'.

במקרים 1 ו-3 יש $2 \cdot 3$ (לבחור אחד מבין $3,4'$ ואחד מבין 1,2,4) העברות אפשריות ובמקרה 2 יש $2 \cdot 3 + 2$ (לבחור אם מעבירים מ-3 ל-$4'$ או להפך או לבחור שניים מבין 1,2,4 ואז לבחור באיזה כיוון מעבירים) העברות אפשריות. כפי שרואים חילקנו את האפשרויות באופן יחסית שוויוני (היה אפשר לקוות לחלק ל-7,7,6 ולא 6,6,8 כפי שעשינו אבל ניתן לראות ש-7,7,6 לא מתאפשר).

נטפל במקרה 1, מקרה 3 מטופל באופן דומה.

נשקול את $1,4'$ מול 2,3. כתוצאה משקילה זו ששת המקרים שלנו יתחלקו שווה בשווה.

מקרה א: $1 + 4' < 2 + 3$. אחרי השקילה הראשונה נשארו שתי אפשרויות לשק הכבד 3 או $4'$, אבל עכשיו קיבלנו ש-$4'$ לא יכול להיות כבד ולכן 3 הוא הכבד. בנוסף ברור ש-2 לא כבד ולכן לשק הכל

נשארו שתי אפשרויות 1 או 4.
בשקילה השלישית נשקול את 4 מול $4'$ אם יצא שוויון אז נדע ש-1 הוא השק הקל אחרת נדע ש-$4'$ הוא השק הקל.

מקרה ב: $1 + 4' = 2 + 3$. כאן שוב יש שתי אפשרויות, או שהעברנו מ-1 ל-$4'$ או מ-2 ל-3.
בשקילה השלישית נשקול את 4 מול $4'$ אם יתקבל שוויון אז העברנו מ-2 ל-3, אחרת העברנו מ-1 ל-$4'$.

מקרה ג: $1 + 4' > 2 + 3$. בדומה למקרה א, השק הכבד חייב להיות $4'$ ולשק הקל יש שתי אפשרויות: 2 ו-4. בשקילה השלישית נשקול את 1,2 מול 3. במקרה שוויון נסיק שהעברנו מ-4 ל-$4'$ ואחרת נסיק ש-העברנו מ-2 ל-4.

נשאר לטפל במקרה 2 שהוא המקרה היותר קשה כיוון שיש בו 8 אופציות.

בשקילה השנייה נשקול את 1,2 מול 3. יש שלושה מקרים:

i. $1 + 2 < 3$. או ששק 3 כבד ואז בשביל לקבל שוויון בשקילה הראשונה השק $4'$ היה חייב להיות קל, או שאחד השקים 1,2 קל ואז בשביל לקבל שוויון בשקילה הראשונה אבל לא בשנייה שק 4 חייב להיות כבד.
בשקילה השלישית נשקול את 2,3 מול 1,4.
אם מתקבל שוויון אז איתי העביר מ-1 ל-4.
אם $2 + 3 < 1 + 4$ נסיק שאיתי העביר משק מספר 2 לשק מספר 4.

אם $2 + 3 > 1 + 4$ אז איתי העביר מ-$4'$ ל-3.

ii. $1 + 2 = 3$. איתי היה חייב לבחור את השקים 1 ו-2 ולהעביר מאחד לשני אך אנו לא יודעים מאיזה אחד לקח ולאיזה שק העביר קמח. בשקילה השלישית נשקול את 1,3 מול 4.

אם 4 יהיה קל יותר אז הרי שאיתי העביר מ-2 ל-1 ואם 4 כבד אז להפך, איתי העביר מ-1 ל-2.

iii. $1 + 2 > 3$. מקרה זה סימטרי למקרה i. נבצע את אותה השקילה ונסיק את המסכנות ההפוכות ממה שהסכנו במקרה i.

בהצלחה!