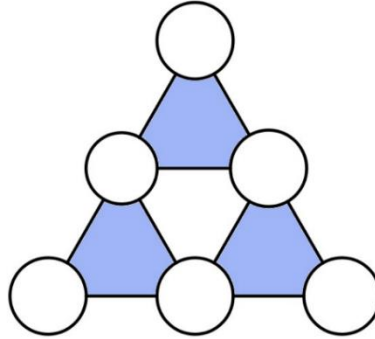


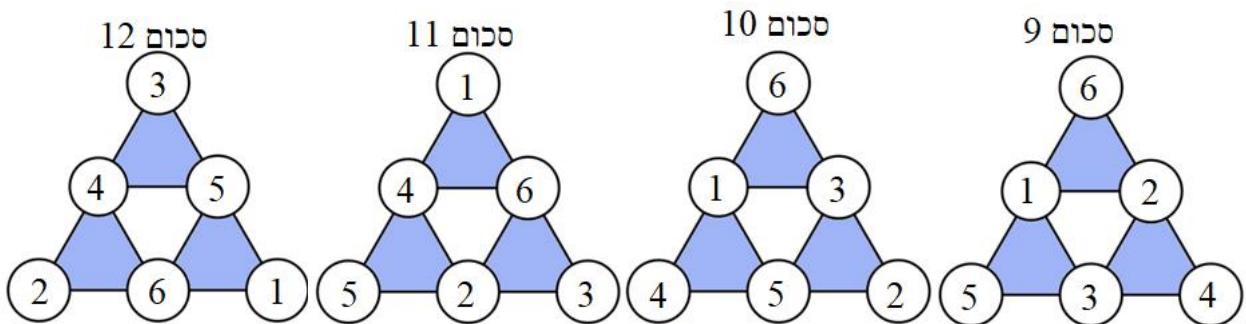


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ג

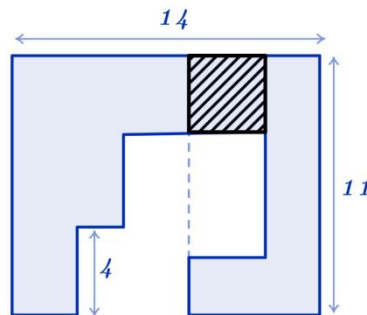
1. (איתי זילברברג) הציבו את המספרים 1,2,3,4,5,6 בתוך העיגולים, כל מספר פעם אחת בדיוק, כך שהסכומים בשלושת המשולשים הכחולים יהיו שווים.



פתרון: ישנן מספר דרכים להציב את המספרים, להלן חלק מהן:



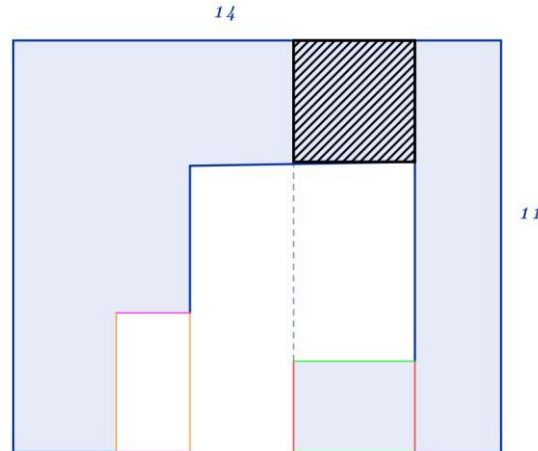
2. (מריה גרינגלז) כל הפינות בתמונה ישרות. בנוסף המרובע השחור הינו ריבוע. מצאו את היקף הצורה הכחולה.



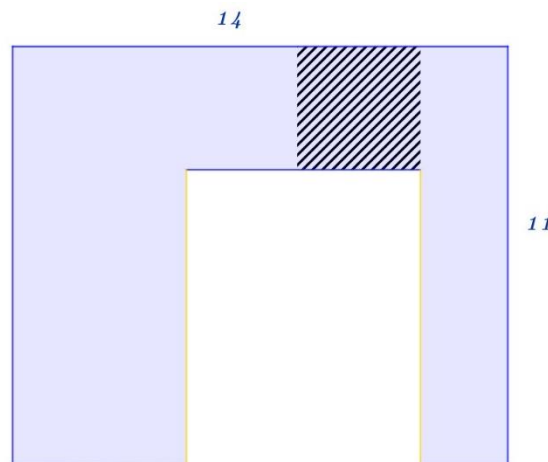


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ג

פתרון: הנתון על הקטע באורך 4 מיותר. בציור הבא רואים ארבעה זוגות של קטעים באורכים שווים (אדומים, וורודים, כתומים וירוקים):



נסיק שהיקף הצורה המבוקשת שווה לפעמיים אורך הקטע הירוק ועוד היקף הצורה הבאה:



סך הכל נקבל שהיקף הצורה שלנו שווה להיקף המלבן עם צלעות 14 ו-11 ועוד פעמיים קטע ירוק ועוד פעמיים קטע צהוב.

נבחין שאורך הקטע הירוק שווה לאורך צלע הריבוע השחור ולכן קטע ירוק+קטע צהוב = 11.

לסיכום היקף הצורה שווה :

$$11 + 14 + 11 + 14 + 2 \times (\text{ירוק} + \text{צהוב}) = 72$$



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ג

3. (דניאל קנר) במחסן היו שישה שקים עם סוכריות שוקולד ששקלו 1,2,3,4,5,6 קילוגרמים ועל כל שק רשום המשקל שלו. יום אחד איתי פתח שק אחד ואולי אכל ממנו מספר סוכריות. כיצד באמצעות שתי שקילות על מאזני כף לגלות מאיזה שק איתי אכל?
הערה: יתכן שאיתי אכל מספר לא שלם של קילוגרמים של סוכריות ויתכן גם שלא אכל סוכריות כלל.

פתרון: בשקילה הראשונה נשקול את 1,2,3 מול 6.

- אם יתקבל שוויון נדע שאיתי לא אכל משקים אלו ונשאר עם 4,5 בתור החשודים. נשקול את 1,4 מול 5. אם יתקבל שוויון נדע שאיתי לא אכל סוכריות. אם 5 יהיה יותר קל נדע שאכל מ-5 ואם הצד של 1,4 יהיה יותר קל נדע שאכל מ-4.
- אם הצד של 6 יהיה יותר קל נדע שאיתי אכל סוכריות משק זה.
- אם הצד של 1,2,3 יצא קל יותר נשקול את 1,5 מול 2,4. אם יתקבל שוויון נדע שאיתי אכל מ-3,5, אם 1,5 יותר קל אז אכל מ-1 ואם 2,4 יותר קל אז אכל מ-2.

4. (מריה גרינגלז) אסף, בר, גיורא ודרור - אחים, וכולם תושבים בארץ השקרנים ודוברי אמת.

שקרנים תמיד משקרים ודוברי אמת תמיד אומרים את האמת.

יום אחד אסף אמר: "מבין ארבעתנו, לפחות שניים - שקרנים"

ואז בר אמר: "לפחות שלושה מאתנו שקרנים"

כמה שקרנים יש בין ארבעת האחים?

פתרון: נשים לב שאם בר צדקה אז גם אסף צדק ולכן מבין האחים יש לפחות שני דוברי אמת (אסף ובר), בסתירה לאמירה של בר.

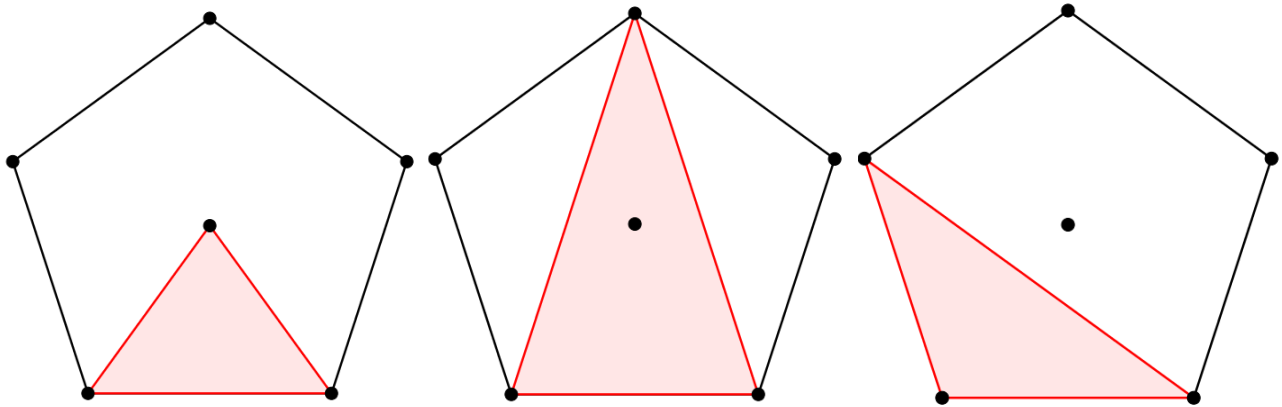
נסיק שבר שיקרה. אם גם אסף שיקר אז בר ואסף שקרנים ולכן יש לפחות שני שקרים בסתירה להנחה שאסף שיקר.

סך הכל קיבלנו שאסף אמר את האמת ובר שיקרה ולכן יש לפחות שני שקרנים אבל פחות מ-3 ולכן יש בדיוק שני שקרנים.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ד'-ה' שלב הגמר, שנת תשפ"ג

5. (אמתי לוי) נגיד שמשולש הוא שווה שוקיים, אם יש לו לפחות שתי צלעות ששוות באורכן. סמנו 6 נקודות במישור כך שכל 3 מהן יוצרות משולש שווה-שוקיים. הסבירו את הבנייה. פתרון: מחומש משוכלל ומרכזו מספקים את הבנייה הרצויה. נוצרים שלווה סוגים של משולשים ושלוש שווי שוקיים.



6. (איתי זילברברג) מספר מתחלק במספר ובמספר אחר ולא מתחלק באף מספר קטן יותר מלבד ל-1. בנוסף, ידוע ש-

$$\text{lemon} \times \text{lemon} + \text{apple} \times \text{apple} = \text{flower}$$

מצאו את כל האפשרויות ל- והוכיחו שאין אפשרויות נוספות.

תזכורת: נגיד ש- מתחלק ב- אם $\text{flower} \div \text{lemon} = 20$ מתחלק ב-4, כי $20 \div 4 = 5$.

תשובה: 20 היא האפשרות היחידה ל-.

פתרון: אם המספר אי-זוגי, גם וגם אי-זוגיים, כי מספר זוגי לא יכול לחלק מספר אי-זוגי. לכן גם המספרים $\text{lemon} \times \text{lemon}$ ו- $\text{apple} \times \text{apple}$ הם אי-זוגיים. בזהות

$$\text{lemon} \times \text{lemon} + \text{apple} \times \text{apple} = \text{flower}$$

בצד שמאל יש סכום של שני מספרים אי-זוגיים, שזה מספר זוגי. אבל מצד ימין יש מספר אי-זוגי, שזו סתירה. לכן חייב להיות זוגי.

כעת, אנחנו יודעים ש- מתחלק ב-2, לכן $\text{lemon} = 2$. נציב זאת במשוואה ונשכתב אותה:

$$2 \times 2 + \text{apple} \times \text{apple} = \text{flower}$$

$$4 = \text{flower} - \text{apple} \times \text{apple}$$

צד ימין הוא חיסור בין שני מספרים שמתחלקים ב-2, לכן צד ימין מתחלק ב-2. אז גם צד שמאל מתחלק ב-2, כלומר 4 מתחלק ב-2. לכן apple הוא 1 או 2 או 4. נתון ש- apple הוא לא 1, ונתון ש- apple ו- lemon שונים, לכן $\text{apple} = 4$. אז

$$\text{flower} = \text{lemon} \times \text{lemon} + \text{apple} \times \text{apple} = 2 \times 2 + 4 \times 4 = 20$$

ו-20 הוא המספר היחיד שמקיים את תנאי השאלה.