האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח
שלב הגמר, שנת תשפ"ב

בעיה 1. (דניאל קנר)
הוסיפו בין המספרים סימנים של פעולות חשבון וסוגריים, כך שהשוויון יהפוך לנכון: יש לרשום סימנים של פעולות חשבון בכל המשבצות, ומותר להוסיף גם סוגריים.

$$1 \;\square\; 2 \;\square\; 3 \;\square\; 4 \;\square\; 5 \;=\; -\frac{1}{4}$$

פתרון.
יש מספר דרכים להציב סימנים וסוגריים, הינה שתיים מהן:

$$(1-2):(3-4+5) = -\frac{1}{4}$$

$$1+(2-3):4\times 5 = -\frac{1}{4}$$

בעיה 2. (דניאל קנר)
נתונה טבלה של 12 שורות ו-10 עמודות. צובעים את משבצות הטבלה באדום, כתום, צהוב וירוק,
כך שבכל שורה:
מספר משבצות ירוקות ≤ מספר משבצות צהובות ≤ מספר משבצות כתומות ≤ מספר משבצות אדומות
ובכל עמודה:
מספר משבצות ירוקות ≤ מספר משבצות אדומות ≤ מספר משבצות כתומות ≤ מספר משבצות צהובות
מצאו את כל האפשרויות למספר המשבצות הירוקות בטבלה. הדגימו את כל אחת מהאפשרויות, והסבירו מדוע אין אפשרויות נוספות.

פתרון.

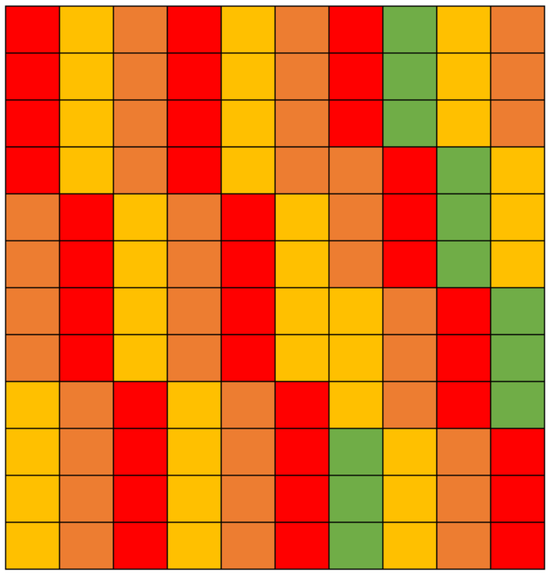
מהתנאי על מספרי המשבצות בשורות אנו יודעים שבכל הטבלה יחדיו מתקיים ש-
מספר משבצות ירוקות ≤ מספר משבצות צהובות ≤ מספר משבצות כתומות ≤ מספר משבצות אדומות

ומהתנאי על מספרי המשבצות בשורות אנו יודעים שבכל הטבלה יחדיו מתקיים ש-
מספר משבצות ירוקות ≤ מספר משבצות אדומות ≤ מספר משבצות כתומות ≤ מספר משבצות צהובות

ולכן חייב להתקיים שבטבלה יש כמות זהה של משבצות אדומות, כתומות וצהובות, יתר על כן שוויון זה חייב להתקיים בכל שורה וכל עמודה.

בכל שורה יש 10 משבצות ולכן אם יש פחות מ-3 משבצות אדומות אז יש לפחות 4 משבצות ירוקות וזה נוגד את הנתון, כמובן שלא יכול להיות שיש 4 משבצות אדומות כי אז יש גם 4 משבצות כתומות וצהובות וזה 12 משבצות בשורה של 10. נסיק שבכל שורה חייבות להיות 3 משבצות אדומות, 3 משבצות כתומות ו-3 משבצות צהובות ומשבצת ירוקה אחת. כיוון שיש 12 שורות נקבל שבטבלה יש 12 משבצות

נשאר להראות שטבלה כזו אכן קיימת, בשביל זה כדאי להגיד גם שבכל עמודה יש 12 משבצות ומטיעון דומה לטיעון שהראנו עם השורות ניתן להסיק שיש שתי אופציות למילוי של עמודה: או 4 משבצות אדומות, צהובות וכתומות ו-0 משבצות ירוקות. או 3 משבצות מכל צבע. כיוון שיש 12 משבצות ירוקות נדע שאנו צריכים לעשות 4 עמודות שבהן יש 3 משבצות ירוקות ו-6 עמודות ללא משבצות ירוקות. עכשיו קל לבנות דוגמה:



<u>בעיה 3.</u> (לב רדזיוילובסקי)

מצאו שני מספרים שלמים חיוביים a, b כך שהמספרים a^4 ו-b^{10} הם מספרים ארבע ספרתיים שמורכבים מאותן הספרות.

<u>פתרון.</u>

נשים לב ש-3^{10} גדול מ-10,000, קל לבדוק זאת באופן הבא: $3^4 = 81$ אז $3^8 = 81^2 > 80^2 = 6400$ ולכן $3^{10} > 6400 \cdot 9 > 10{,}000$ (כמובן שאפשר גם לחשב את 3^{10} במדויק, זה יוצא 59049 אך אין צורך לחשב את התוצאה המדויקת בשביל לפתור את השאלה.

נסיק כי b חייב להיות 2, הרי שאם הוא לפחות 3 אז $b^{10} > 10{,}000$ וכמובן ש-$b \neq 1$. כלומר קיבלנו ש-$b^{10} = 2^{10} = 1024$. כמובן ש-$a < 10$ כי 10^4 זה כבר 5 סיפרתי ולכן אנחנו רק צריכים לבדוק חזקות רביעיות עד 10, מהטבלה ניתן לראות שרק $a = 7$ מתאים.

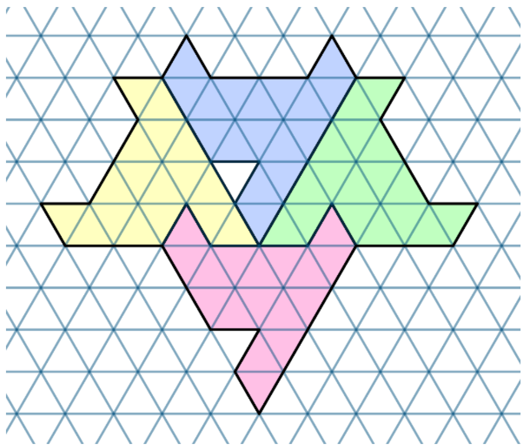
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

הערה: ניתן להגיד גם שחזקה רביעית תמיד נגמר ב-1,6 או 5 והספרות שיש ב-a^4 הן 0,12,4 ולכן המספר חייב להסתיים ב-1 ולכן a חייב להיות אי-זוגי ואנו מייד מצטמצמים לבדיקה של $a = 7$ ו-$a = 9$.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח
שלב הגמר, שנת תשפ"ב

בעיה 4. (איליה גרינגלז)
חתכו את הצורה ל-4 חלקים חופפים.

פתרון.

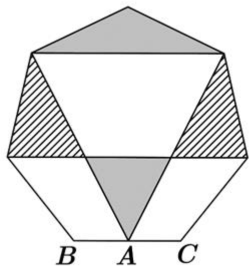


בעיה 5. (לב רדזיוילובסקי)
מצאו את המספר השלם החיובי הקטן ביותר שמתחלק ב-99990001 וסכום ספרותיו שווה ל-2.

פתרון.
המכפלה לא יכולה להיות חזקה של 10 או 2 כפול חזקה של 10, כי אז כל הגורמים הראשוניים של המכפלה הם 2 או 5, אבל אין גורמים כאלה במספר 99990001. לכן צריכות להיות שתי ספרות לא אפסיות שהן יכולות להיות רק 1 ו-1, ויתר הספרות צריך להיות שוות ל-0.
נשים לב כי

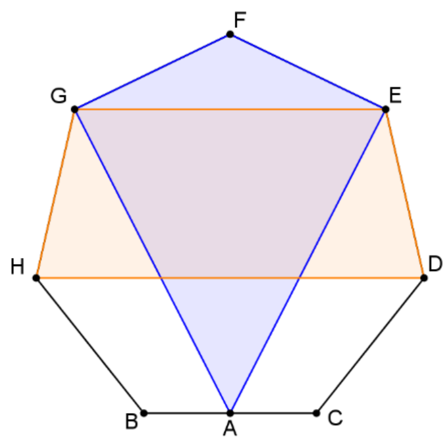
$$\begin{aligned} &99990001 \cdot 10001 = \\ &= 999900010000 + \\ &+ 99990001 = \\ &= 1000000000001 \end{aligned}$$

השאלה היא האם יש מספר שקטן מ-10001 עם אותה התכונה. אם כן, אז המכפלה תצא מספר ארוך, לפחות 8 ספרות. הספרה המובילה של המכפלה צריכה להיות 1. הספרה הימנית היא 0 או 1, אבל אם היא 0 אז בעצם מכפילים במספר שמתחלק ב-10, והיה אפשר להכפיל במספר פי 10 קטן יותר, ולקבל תוצאה עם אותו סכום ספרות. לכן ניתן להניח שהספרה הימנית היא 1, ואפילו ש-4 הספרות מימין הן 0001. אבל כפל ארוך מתבצע מימין לשמאל, לכן 4 הספרות הימניות של המכפלה מתקבלות כאשר מכפילים את המספרים הארבע-ספרתיים בצד ימין של כל גורם. לכן עם $99990001 \cdot x$ מסתיים ב-0001, אז גם x מסתיים ב-0001. מכיוון ש-x גדול מ-1, אז הוא לפחות 10001.

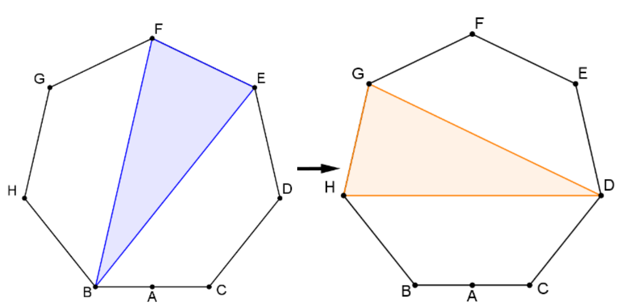


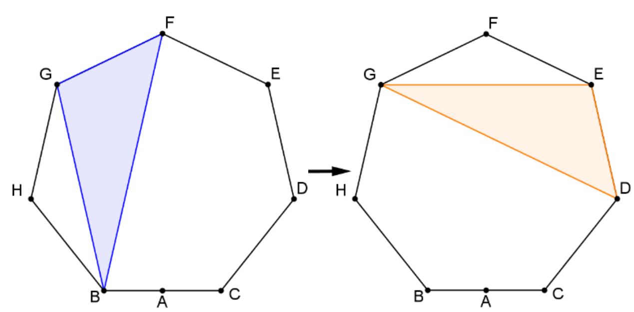
בעיה 6. (דניאל קנר, איליה גרינגלז)
בתמונה משובע משוכלל, הנקודה A היא אמצע הצלע BC.
איזה שטח גדול יותר: המושחר או המקווקו?

פתרון.
נוסיף לשני החלקים את השטח הלבן באמצע ולכן אנו מעוניינים להשוות בין השטחים של $AEFG$ ו-$DEGH$.
$EG||BC$ ולכן השטח של משולש AEG שווה לשטח של המשולש BEG כלומר אנחנו אמורים להשוות בין השטחים של $BEFG$ ו-$DEGH$.



המרובע $BEFG$ מרוכז מהמשולשים BEF ו-BEG. נשים לב שאם נסובב את המשולש BEF סביב מרכז המשושה **נגד** כיוון השעון בזווית של $2\cdot\frac{360^\circ}{7}$ הוא יעבור למשולש DGH ואם נסובב את המשולש BEG סביב מרכז המשושה **עם** כיוון השעות בזווית של $2\cdot\frac{360^\circ}{7}$ הוא יעבור למשולש GDE. נשאר לציין כי המשולשים DGH ו-DGE בדיוק מרכיבים את המרובע $DEGH$ ולכן שטחי המרובעים $BEFG$ ו-$DEGH$ וכך גם השטחים המקוריים.

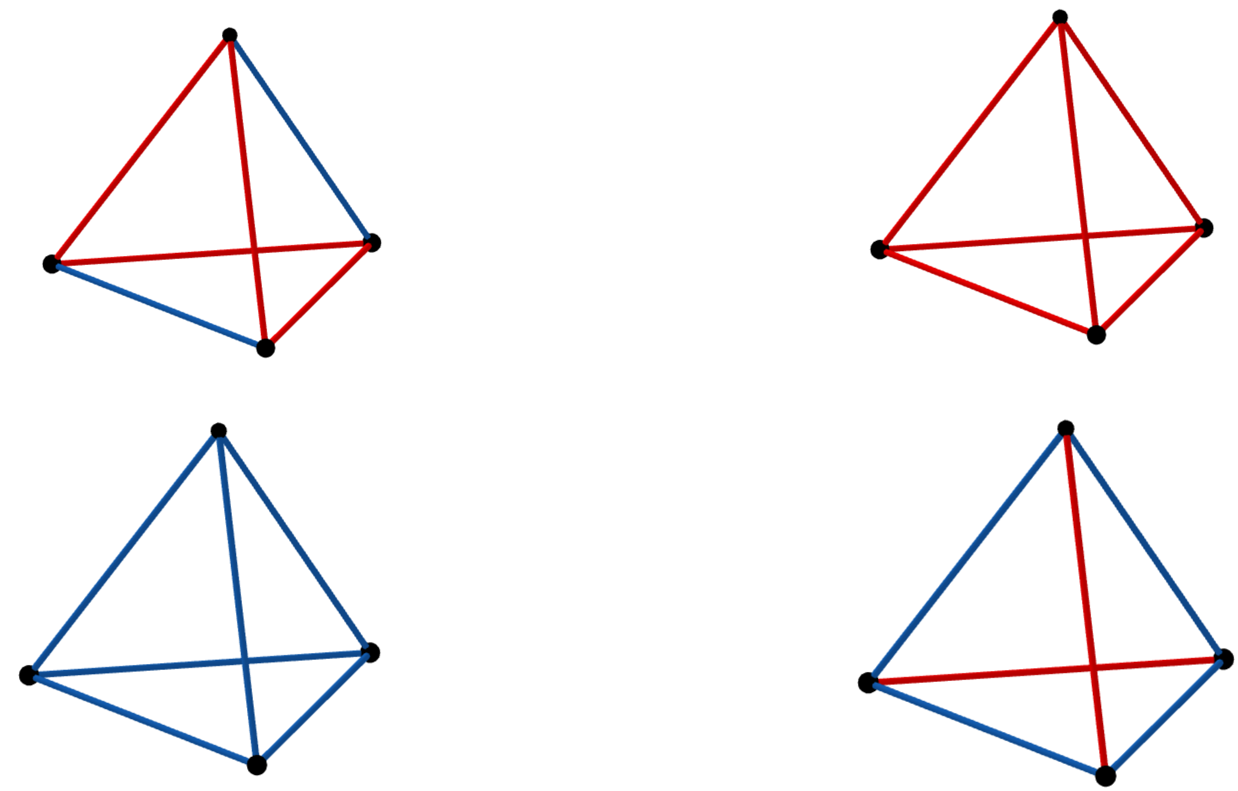




<u>בעיה 7.</u> (אלכסנדר טולסניקוב)
לפנחס יש ערימה של חלקי לגו בצורת פירמידה משולשת משוכללת (כל הפירמידות שוות גודל). פנחס צובע כל מקצוע של כל אחת מהפירמידות באחד משני צבעים. שתי פירמידות נקראות *מתאימות* אם ניתן לחבר אותן זו לזו לאורך פאה מסוימת כך שהצבעים בכל המקצועות יתאימו. מהו המספר המקסימלי של פירמידות שפנחס יכול לצבוע כך שאף שתי פירמידות לא יתאימו?

<u>פתרון.</u>
נשים לב שיש 4 דרכים לצבוע משולש בשני צבעים: או שכל הצלעות כחולות, או שיש צלע אדומה אחת ושתי צלעות כחולות או שתי צלעות אדומות וצלע אחת כחולה או שכל הצלעות אדומות.
נטען שהכמות המקסימלית של פירמידות שפנחס יכול לצבוע היא 4, אכן אם פנחס צבע 5 פירמידות אז מבין הפאות התחתונות שלהן יש שתי פאות זהות (הרי שלמשולש יש רק 4 אופציות) ולכן ניתן להתאים שתי פירמידות לאורח הפאה התחתונה.

נראה כיצד פנחס יכול לצבוע 4 פירמידות כך שבכל אחת מהן כל הפאות יהיו מאותו סוג (כלומר כמות זהה של צלעות אדומות בכל פאה):



ברור שלא ניתן להתאים אף שתים מבין פירמידות אלו.