האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו
שלב הגמר, שנת תשפ"ב

בעיה 1. (מריה גרילנגז)
בגינה היו פרפרים וזחלים. בהתחלה מספר הפרפרים היה פי שתיים גדול יותר ממספר הזחלים. אחרי ש-4 פרפרים עפו מהגינה, ו-3 זוחלים הפכו לפרפרים, מספר הפרפרים נהיה פי 3 גדול יותר ממספר הזחלים. כמה פרפרים וכמה זחלים היו בגינה בהתחלה? נמקו את תשובתכם.

תשובה. 16 פרפרים ו-8 זחלים.

פתרון.
נסמן את מספר הזחלים שהיו בגינה בהתחלה, דרך z.

אז, אחרי ש-3 זחלים הפכו לפרפרים, נהיה $z-3$ זחלים.
מצד שני, מספר הפרפרים בהתחלה היה כמו פעמיים מספר הזחלים, כלומר $2z$. ואז, אחרי ש-4 פרפרים עפו, אבל התווספו 3 פרפרים שהיו קודם זחלים, מספר הפרפרים ירד ב-1, כלומר, נהיה $2z-1$.

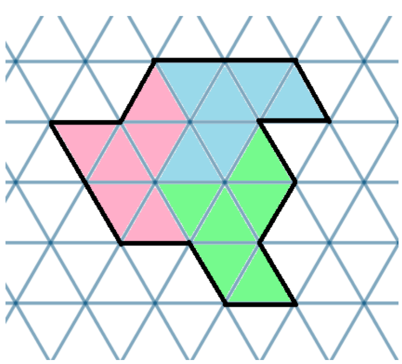
ידוע שאחרי כל השינויים, מספר הפרפרים בגינה נהיה פי 3 גדול יותר ממספר הזחלים, כלומר
$$3(z-3)=2z-1$$
לפי חוק הפילוג, אפשר לשכתב את זה ככה:
$$3z-9=2z-1$$
אם נחסיר 9 משני האגפים, השוויון ישמר:
$$3z=2z+8$$
ואז האפשרות היחידה ל-z היא 8, כלומר, מספר הזחלים היה יכול להיות רק 8.

מספר הפרפרים בהתחלה היה פי 2 יותר ממספר הזחלים, לכן הוא חייב להיות 16.

נבדוק שזה באמת עובד. כאשר שלושה מתוך שמונה הזחלים יהפכו לפרפרים, ישארו 5 זחלים. וכאשר ארבעה פרפרים יעופו ויתווספו שלושה, שהיו קודם זחלים, מספר הפרפרים יהפוך ל-15. זה אכן יהיה פי 3 גדול יותר ממספר הזחלים.

בעיה 2. (מריה גרינלגז)
ציירו כיצד לחתוך את הצורה ל-3 חלקים חופפים.

תשובה.



<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>
שלב הגמר, שנת תשפ"ב

<u>בעיה 3.</u> (איליה גרינגלז)
בכל משבצת של טבלה בגודל 3×3 רשום 1. תוך מהלך אחד מותר לבחור שורה מהטבלה *ולהוסיף* לה שורה אחרת, כלומר, להוסיף למספר הראשון של השורה את המספר הראשון של השורה האחרת, למספר השני – את המספר השני של השורה האחרת, ולמספר השלישי של השורה להוסיף את המספר השלישי של השורה האחרת; כמו כן, מותר לבחור עמודה ולהוסיף לה עמודה אחרת. האם ניתן להגיע באמצעות מהלכים כאלה לטבלה בה במשבצת השמאלית העליונה רשום 43, במשבצת המרכזית רשום 9, במשבצת הימנית התחתונה רשום 1, ואין אף מספר 1 נוסף בתוך הטבלה? נמקו את תשובתכם.

<u>פתרון.</u>

אי אפשר להגיע לטבלה הרצויה. בעצם אפילו אי אפשר להגיע למצב הבא:

43	משהו	לא 1
משהו	משהו	משהו
לא 1	משהו	1

נוכיח את זה בעזרת טענת עזר הבאה:

טענת עזר: הטבלה תמיד תהיה לוח כפל, כלומר מהצורה הבאה:

a×c	a×d	a
b×c	b×d	b
c	d	1

הוכחה: הטבלה ההתחלתית היא כזאת (כי $1 \times 1 = 1$)

ופעולות מותרות לא יכולות להרוס את התכונה הזאת, למשל אם נחבר שורה ראשונה לשנייה:

a×c	a×d	a
b×c	b×d	b
c	d	1

→

a×c	a×d	a
(a+b)×c	(a+b)×d	a+b
c	d	1

זה מוכיח את טענת העזר. בגלל שהמספר 43 הוא ראשוני הדרך היחידה להציג אותו במכפלה של שני טבעיים זה $1 \cdot 43$, ולכן במצב

43	משהו	a
משהו	משהו	משהו
b	משהו	1

a או b חייב להיות שווה ל-1.

<u>בעיה 4.</u> (איליה גרינגלז)

ליוסי יש משחק הרכבה בשם "מוטות וקודקודים". *קודקוד* זה כדור קטן עם שקעים, שאפשר לחבר אליו מוטות באמצעות הכנסתם לשקעים. יש שלושה סוגים של קודקודים:

לקודקוד כחול יש 3 שקעים לחיבור מוטות,

לקודקוד ירוק יש 4 שקעים לחיבור מוטות,

לקודקוד אדום יש 5 שקעים לחיבור מוטות.

המוטות הם גמישים וגם יכולים להיות בכל אורך.

כללי המשחק: כל מוט בתוך הצורה שבונים מחבר שני קודקודים שונים, כלומר, אין קצוות "באוויר" וגם לא מחברים את שני הקצוות של המוט לאותו הקודקוד. שני קודקודים יכולים להיות מחוברים עם מוט אחד, אך לא יותר – או לא להיות מחוברים כלל. דבר נוסף, אסור שיישארו שקעים בלי מוטות שיוצאים מהם, כלומר, מכל שקע חייב לצאת מוט.

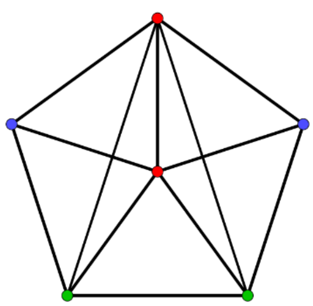
יוסי רוצה להרכיב צורה שיהיו בה קודקודים מכל 3 הצבעים.

א. מהו המספר הקטן ביותר של קודקודים שיכולים להיות בצורה כזאת?

ב. מהו המספר הקטן ביותר של מוטות שיכולים להיות בצורה הזאת?

נמקו את התשובות.

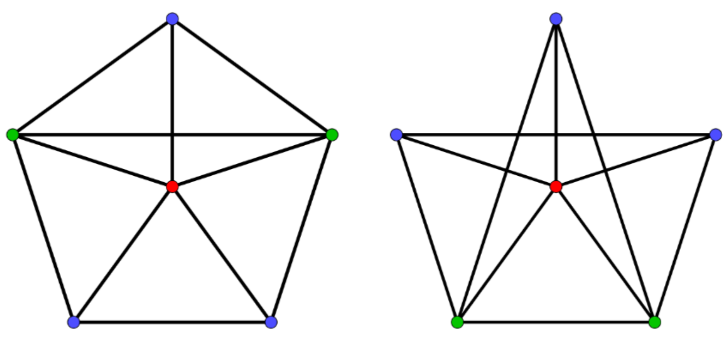
<u>תשובות.</u> א. 6   ב. 11



<u>פתרון.</u>

א. בצורה שלנו חייב להיות לפחות קודקוד אדום אחד. הקודקוד האדום חייב להיות מחובר לפחות ל-5 קודקודים נוספים. לכן, אי אפשר להרכיב צורה בעלת פחות מ-6 קודקודים. בתמונה דוגמה לצורה בעלות 6 קודקודים שניתן להרכיב.

ב. לפי הסעיף הקודם, יש לפחות 6 קודקודים. מתוכם יש לפחות אחד אדום, עם 3 חיבורים, ולפחות אחד ירוק, עם 4 חיבורים. אז בכל הקודקודים יחד יש לפחות $5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$ שקעים. כל מוט מחבר שני שקעים, לכן מספר השקעים חייב להיות זוגי – ואז מספר השקעים חייב להיות לפחות 22, וזה אומר שיש לפחות 11 מוטות. בתמונה דוגמה לצורה שמורכבת מ-11 מוטות.



בעיה 5. (מריה גרינגלז)
נקרא למספר שלם חיובי *מיוחד*, אם ברישום שלו יכולות להופיע רק ספרות 1, 2, 3, 6 ו-8 (כך, למשל, המספר 113 הוא מיוחד, והמספר 806 – לא). מצאו סכום של כל המספרים התלת ספרתיים המיוחדים. נמקו את תשובתכם.

תשובה. 55500

פתרון.

נחשב קודם את סכום של ספרות היחידות של כל המספרים.

נחלק את המספרים *למשפחות*. כל משפחה תהיה מורכבת מ-5 מספרים שנבדלים בספרת היחידות בלבד. למשל, המספרים 61**1**, 61**2**, 61**3**, 61**6** ו-61**8** מהווים *משפחה*. סכום של ספרות היחידות בכל משפחה שווה ל-$1+2+3+6+8=20$.

כמה משפחות כאלה יש? יש בסך הכל חמש מאות בהן יכולים להיות המספרים האלה (מספרים שהם מאה ומשהו, או מאתיים ומשהו, או שלוש מאות ומשהו, או שש מאות ומשהו, או שמונה מאות ומשהו), ובכל אחת מהמאות יש חמש עשיריות רלוונטיות. זה נותן בסך הכל $5\cdot 5=25$ משפחות.

לכן, הסכום הכולל של כל ספרות היחידות בכל המספרים שווה ל-$25\cdot 20=500$.

באופן דומה ניתן לחשב גם את הסכום של כל ספרות העשרות של כל המספרים: לכל בחירה של ספרת המאות וספרת היחידות, יש חמישה מספרים שנבדלים רק בספרת העשרות, וסכום של ספרות העשרות במשפחה כזאת שווה ל-20. יש בסך הכל $5\cdot 5=25$ משפחות כאלה, לכן סכום של כל ספרות העשרות בכל המספרים הוא גם $25\cdot 20=500$.

באופן דומה, גם סכום של ספרות המאות בכל המספרים הוא 500.

לכן, סכום של כל המספרים זה:

$$100\cdot 500+10\cdot 500+500=55500$$

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

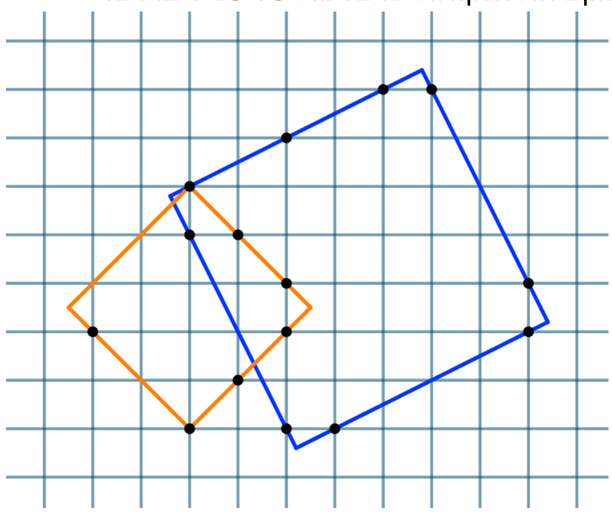
שלב הגמר, שנת תשפ"ב

בעיה 6. (מריה גרינגלז)

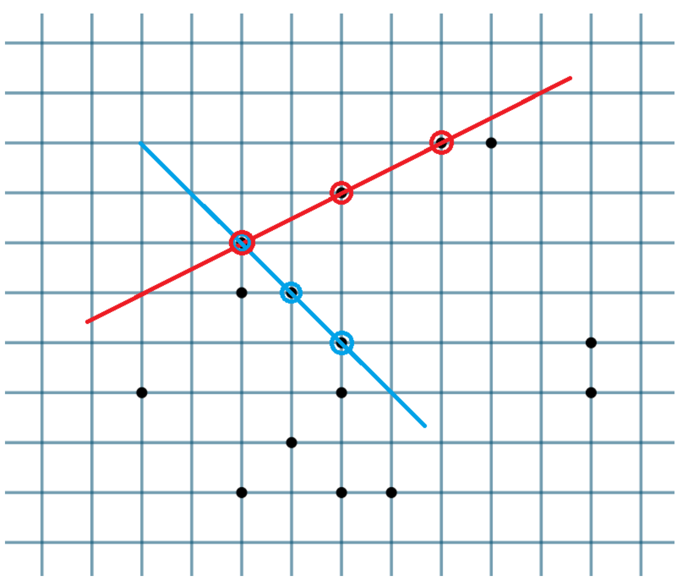
בתמונה מספר נקודות. רחל רוצה לצייר מספר ריבועים, כך שכל נקודה מסומנת תהיה על קודקוד או על צלע של ריבוע כלשהו. מהו המספר הקטן ביותר של ריבועים, שרחל צריכה לצייר? נמקו את תשובתכם.

פתרון.

בתמונה דוגמה איך אפשר למקם את הנקודות על צלעות של שני ריבועים.



נראה כי לא ניתן למקם את כל הנקודות על צלעות של ריבוע אחד. נשים לב שאם 3 נקודות נמצאות על ישר אחד וגם נמצאות על שפה של ריבוע, הן חייבות להיות על אותה הצלע. הנקודות המודגשות בציור מגדירות שני ישרים שלא מאונכים וגם לא מקבילים – ואז הישרים האלה לא יכולים להכיל שתי צלעות של אותו הריבוע.



כלומר, ריבוע אחד לא יכול להיות, ואז שניים זה המספר הקטן ביותר של ריבועים