



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב הגמר, שנת תשפ"ב - פתרונות

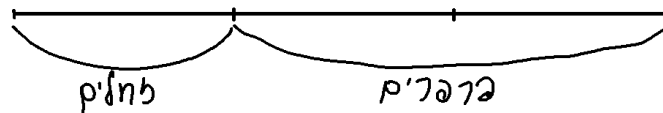
בעיה 1. (מריה גרינגלז)

בגינה היו פרפרים וזחלים, בסך הכל 31. אחרי ש-4 פרפרים עפו מהגינה, ו-3 זחלים הפכו לפרפרים, מספר הפרפרים נהיה פי שתיים גדול יותר ממספר הזחלים. כמה פרפרים וכמה זחלים היו בגינה בהתחלה? נמקו את תשובתכם, כלומר, הסבירו, למה הכמויות שציינתם, יכולות להיות, ולמה זאת האפשרות היחידה.

תשובה. 19 פרפרים ו-12 זחלים.

פתרון.

אחרי ש-4 פרפרים עפו מהגינה, נהיה בגינה בסך הכל 27 פרפרים וזחלים יחד. בנוסף, נתון שאחרי כל השינויים מספר הפרפרים נהיה פי שתיים גדול יותר ממספר הזחלים:



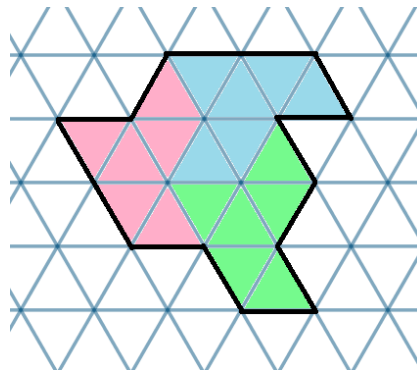
מהציור רואים, שאחרי כל השינויים, מספר הזחלים נכנס בתוך המספר הכולל של החרקים 3 פעמים. לכן, מספר הזחלים נהיה $9 = 27 : 3$, ומספר הפרפרים נהיה $18 = 9 \cdot 2$.

כתוצאה מהשינויים, מספר הפרפרים ירד ב-1, לכן, כדי שהמספר יגיע ל-18 כתוצאה מהשינוי, הוא צריך להיות 19 בהתחלה. מספר הזחלים ירד ב-3 ונהיה 9, לכן בהתחלה הוא היה 12.

בעיה 2. (מריה גרינגלז)

ציירו כיצד לחתוך את הצורה ל-3 חלקים חופפים.

פתרון.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב הגמר, שנת תשפ"ב - פתרונות

בעיה 3. (איליה גרינגלז)

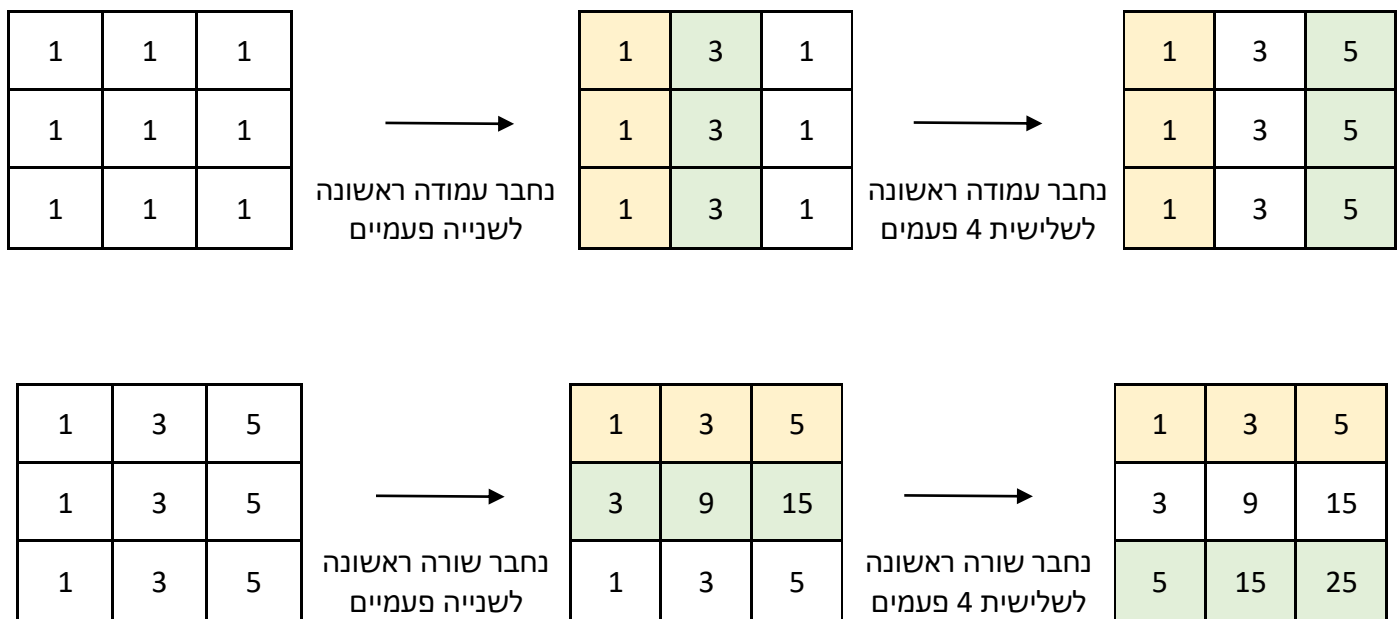
בכל משבצת של טבלה בגודל 3×3 רשום 1. תוך מהלך אחד מותר לבחור שורה מהטבלה ולהוסיף לה שורה אחרת, כלומר, להוסיף למספר הראשון של השורה את המספר הראשון של השורה האחרת, למספר השני – את המספר השני של השורה האחרת, ולמספר השלישי של השורה להוסיף את המספר השלישי של השורה האחרת; כמו כן, מותר לבחור עמודה ולהוסיף לה עמודה אחרת. כיצד להגיע באמצעות מהלכים כאלה לטבלה בה במשבצת השמאלית העליונה רשום 1, במשבצת המרכזית רשום 9, במשבצת הימנית התחתונה רשום 25, ואין אף מספר 1 נוסף בתוך הטבלה? ציירו את הטבלה ורשמו דרך להגיע אליה.

פתרון.

הטבלה הסופית יכולה להיות רק כזאת (להוכחה – מוזמנים לקרוא פתרון של שאלה 3 אצל כיתות ה-ו):

1	3	5
3	9	15
5	15	25

וכדי להגיע אליה אפשר לעשות ככה:

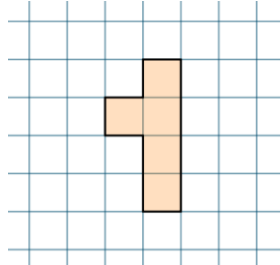




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב הגמר, שנת תשפ"ב - פתרונות

בעיה 4. (איליה גרינגלז)

לנגר יש לוח עץ בגודל 8×8 משבצות. הוא רוצה לגזור ממנו כמה שיותר צורות הבאות:

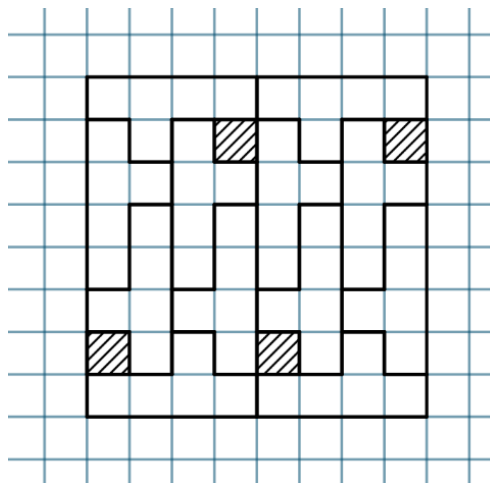


מהי הכמות הגדולה ביותר של הצורות שהוא יכול לגזור? נמקו את תשובתכם, כלומר, ציירו כיצד הנגר יכול לגזור את הכמות הזאת של צורות מהלוח והסבירו, למה זה המספר הגדול ביותר של צורות שהוא יכול לגזור.

תשובה 12.

פתרון.

בתמונה דוגמה כיצד ניתן לגזור 12 צורות.



לא ניתן לגזור יותר מ-12, כי שטח הצורה 5 משבצות, ו- $60 > 65 = 13 \cdot 5$.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב הגמר, שנת תשפ"ב - פתרונות

בעיה 5. (איליה גרינגלז)

ליוסי יש משחק הרכבה בשם "מוטות וקודקודים". קודקוד זה כדור קטן עם שקעים, שאפשר לחבר אליו מוטות באמצעות הכנסתם לשקעים. יש שלושה סוגים של קודקודים:
לקודקוד כחול יש 3 שקעים לחיבור מוטות,
לקודקוד ירוק יש 4 שקעים לחיבור מוטות,
לקודקוד אדום יש 5 שקעים לחיבור מוטות.
המוטות הם גמישים וגם יכולים להיות בכל אורך.

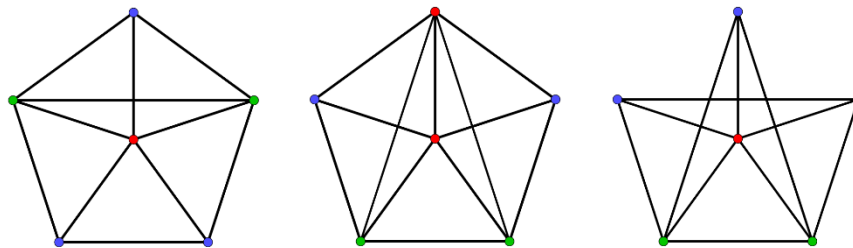
כללי המשחק: כל מוט בתוך הצורה שבונים מחבר שני קודקודים שונים, כלומר, אין קצוות "באוויר", וגם לא מחברים את שני הקצוות של המוט לאותו הקודקוד. שני קודקודים יכולים להיות מחוברים עם מוט אחד, אך לא יותר – או לא להיות מחוברים כלל. דבר נוסף, אסור שיישאר שקעים בלי מוטות שיוצאים מהם, כלומר, מכל שקע חייב לצאת מוט.

יוסי רוצה להרכיב צורה שיהיו בה קודקודים מכל 3 הצבעים. מהו המספר הקטן ביותר של קודקודים שיכולים להיות בצורה כזאת? נמקו את תשובתכם: ציירו את הצורה והסבירו למה מספר הקודקודים לא יכול להיות קטן יותר.

תשובה 6.

פתרון.

בצורה שלנו חייב להיות לפחות קודקוד אדום אחד. הקודקוד האדום חייב להיות מחובר לפחות ל-5 קודקודים נוספים. לכן, אי אפשר להרכיב צורה בעלת פחות מ-6 קודקודים. בתמונה מספר דוגמאות לצורות בעלות 6 קודקודים שניתן להרכיב (יש גם דוגמאות נוספות).





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב הגמר, שנת תשפ"ב - פתרונות

בעיה 6. (מריה גרינגלז)

בהינתן מספר חיובי שלם, נקרא לו *מיוחד*, אם ברישום שלו יכולות להופיע רק ספרות 1, 2, 3, 6 ו-8 (כך, למשל, המספר 116 הוא מיוחד, והמספר 806 – לא). מצאו סכום של כל המספרים התלת ספרתיים המיוחדים. נמקו את תשובתכם.

תשובה. 55500

פתרון.

נחשב קודם את **סכום של ספרות היחידות של כל המספרים**.

נחלק את המספרים ל**משפחות**. כל משפחה תהיה מורכבת מ-5 מספרים שנבדלים בספרת היחידות בלבד. למשל, המספרים 611, 612, 613, 616 ו-618 מהווים *משפחה*. סכום של ספרות היחידות בכל משפחה שווה ל- $1 + 2 + 3 + 6 + 8 = 20$.

כמה משפחות כאלה יש? יש בסך הכל חמש מאות בהן יכולים להיות המספרים האלה (מספרים שהם מאה ומשהו, או מאתיים ומשהו, או שלוש מאות ומשהו, או שש מאות ומשהו, או שמונה מאות ומשהו), ובכל אחת מהמאות יש חמש עשיריות רלוונטיות. זה נותן בסך הכל $5 \cdot 5 = 25$ משפחות.

לכן, הסכום הכולל של כל ספרות היחידות בכל המספרים שווה ל- $500 = 25 \cdot 20$.

באופן דומה ניתן לחשב גם את **הסכום של כל ספרות העשרות של כל המספרים**: לכל בחירה של ספרת המאות וספרת היחידות, יש חמישה מספרים שנבדלים רק בספרת העשרות, וסכום של ספרות העשרות במשפחה כזאת שווה ל-20. יש בסך הכל $5 \cdot 5 = 25$ משפחות כאלה, לכן סכום של כל ספרות העשרות בכל המספרים הוא גם $500 = 25 \cdot 20$.

באופן דומה, גם **סכום של ספרות המאות בכל המספרים** הוא 500.

לכן, סכום של כל המספרים זה:

$$100 \cdot 500 + 10 \cdot 500 + 500 = 55500$$