

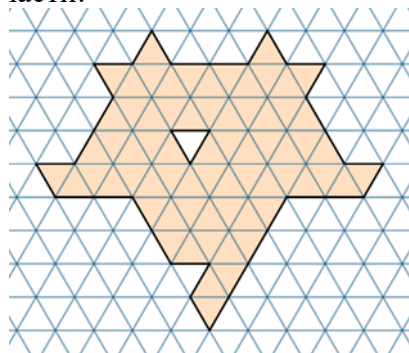
Всеизраильская математическая олимпиада для 9 класса  
 Финал, 5782 год

1. Дана таблица, в которой 12 строк и 10 столбцов. Клетки таблицы покрасили в красный, оранжевый, жёлтый и зелёный цвета так, что в каждой строке:  
 количество красных клеток  $\geq$  количество оранжевых клеток  $\geq$  количество жёлтых клеток  $\geq$  количество зелёных клеток  
 и в каждом столбце:  
 количество жёлтых клеток  $\geq$  количество оранжевых клеток  $\geq$  количество красных клеток  $\geq$  количество зелёных клеток.  
 Чему может равняться количество зелёных клеток в таблице? Приведите пример для каждого варианта ответа и объясните, почему других нету.

2. Три медианы делят треугольник на 6 маленьких треугольников. Маленькие треугольники красят в синий и оранжевый цвет в шахматном порядке и вписывают в каждый из них окружность соответствующего цвета. Докажите, что сумма чисел, обратных к радиусам синих окружностей, равна сумме чисел, обратных к радиусам оранжевых окружностей. То есть, если радиусы синих окружностей равны  $r_1, r_2$  и  $r_3$ , а оранжевых –  $r_4, r_5$  и  $r_6$ , то

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}$$

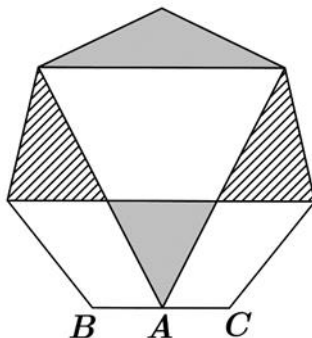
3. Разрежьте фигуру на 4 равные части:



4. Про целые положительные числа  $a, b, c$  известно, что  $N = a^8 + b^{10} + c^{12} + 1$  делится на 5.

- а) Докажите, что  $abc$  делится на 25.
- б) Докажите, что  $N$  делится на 25.

5. На картинке изображён правильный семиугольник, причём точка  $A$  середина стороны  $BC$ . Какая из площадей больше: выделенная серым или заштрихованная?



6. У Пинхаса есть набор деталей Лего в виде правильной треугольной пирамиды (все пирамиды одинакового размера). Пинхас красит каждое ребро каждой из пирамидок в один из трёх цветов. Две пирамидки называются *подходящими*, если их можно приклеить друг к другу по определённой грани так, чтобы цвета всех пар скленных друг с другом рёбер совпали. Для какого числа пирамидок Пинхас может их так покрасить, чтобы никакие две не подошли друг к другу?

7. Дана последовательность

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5782, \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n$$

Найдите  $a_{2022}$ .

Желаем успеха!

Задания олимпиады, решения к ним и дополнительная информация будут размещены на сайте <http://www.israelmath.com/olymp>