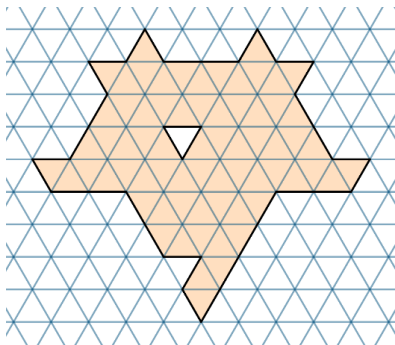




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט שלב הגמר, שנת תשפ"ב

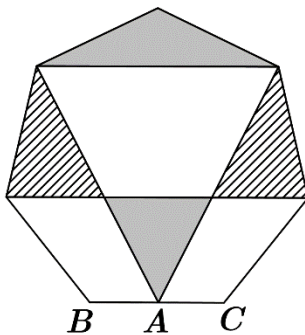
1. נתונה טבלה של 12 שורות ו-10 עמודות. צובעים את משבצות הטבלה באדום, כתום, צהוב וירוק, כך שבכל שורה:
מספר משבצות ירוקות \geq מספר משבצות צהובות \geq מספר משבצות כתומות \geq מספר משבצות אדומות
ובכל עמודה:
מספר משבצות ירוקות \geq מספר משבצות אדומות \geq מספר משבצות כתומות \geq מספר משבצות צהובות
מצאו את כל האפשרויות למספר המשבצות הירוקות בטבלה. הדגימו את כל אחת מהאפשרויות, והסבירו מדוע אין אפשרויות נוספות.

2. שלושה תיכונים מחלקים משולש ל-6 משולשים. צובעים את המשולשים שהתקבלו בכחול וכתום לסירוגין, ובכל אחד מהם חסום מעגל בצבע תואם. הוכיחו כי סכום המספרים ההופכיים לרדיוסי המעגלים הכחולים שווה לסכום המספרים ההופכיים לרדיוסי המעגלים כתומים. כלומר, אם רדיוסי המעגלים הכחולים הם r_1, r_3, r_5 ורדיוסי המעגלים הכתומים הם r_2, r_4, r_6 , אז $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}$.



3. חתכו את הצורה ל-4 חלקים חופפים:

4. עבור מספרים שלמים חיוביים a, b, c ידוע ש- $N = a^8 + b^{10} + c^{12} + 1$ מתחלק ב-5.
א. הוכיחו כי abc מתחלק ב-25.
ב. הוכיחו כי N מתחלק ב-25.



5. בתמונה משובע משוכלל, הנקודה A היא אמצע הצלע BC. איזה שטח גדול יותר: המושחר או המקווקו?

6. לפנחס יש ערימה של חלקי לגו בצורת פירמידה משולשת משוכללת (כל הפירמידות שוות גודל). פנחס צובע כל מקצוע של כל אחת מהפירמידות באחד משלושה צבעים. שתי פירמידות נקראות מתאימות אם ניתן לחבר אותן זו לזו לאורך פאה מסוימת כך שהצבעים בכל המקצועות יתאימו. לאילו כמויות של פירמידות פנחס יכול לצבוע כך שאף שתי פירמידות לא יתאימו?

7. נתונה סדרה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5782, \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n$$

מצאו את a_{2022} .

בהצלחה!