



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט שלב ב, שנת תשפ"ב – פתרונות

3. נתונה תיבה. אילו כל מקצוע שלה היה יותר קצר בסנטימטר אחד, הנפח של התיבה היה 720 סמ"ק. ואילו כל מקצוע שלה היה יותר ארוך בסנטימטר אחד, הנפח של התיבה היה 1320 סמ"ק. מצאו את שטח הפנים של התיבה.

תשובה: 598

פתרון: נסמן את אורכי מקצועות התיבה ב- a, b, c אנו יודעים ש-

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 720$$

כלומר

$$abc - ab - bc - ac + a + b + c - 1 = 720$$

ו-

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 1320$$

כלומר

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 = 1320$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה:

$$2(ab + bc + ac) + 2 = 600$$

ולכן $598 = 2(ab + bc + ac)$ ו- $2(ab + bc + ac)$ זה בדיוק שטח הפנים של התיבה.

4. מצאו את המספר k הגדול ביותר כך שלכל שני מספרים שלמים המקיימים: $ab = 999$ בהכרח מתקיים: $k \leq (a - b)^2$.

תשובה: 100

פתרון: ניתן להניח שהגורמים הם שלמים חיוביים; אם a ו- b שליליים, ניתן להחליף סימן לשניהם, ושום דבר לא ישתנה. נביח שקל לפרק את 999 לגורמים ראשוניים. אכן $999 = 111 \cdot 9$ וגם 111 מתחלק ב-3, לכן $999 = 37 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 37 \cdot 27$. המספר 37 הוא ראשוני. לכן אם $999 = a \cdot b$ אז אחד הגורמים מתחלק ב-37 והגורם האחר שלא מתחלק ב-37 הוא לכל היותר 27. לכן ההבדל בין הגורם הגדול לגורם הקטן הוא לפחות 10. לכן $100 = 10^2 \leq (a - b)^2$ כאשר a ו- b הם 27 ו-37 בסדר כלשהו.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט שלב ב, שנת תשפ"ב – פתרונות

5. המספרים הממשיים x, y, z, t מקיימים:

$$x + 2y + 3z + 4t = 34$$

$$x + 3y + 5z + 7t = 57$$

מצאו את $31x + 21y + 11z + t$

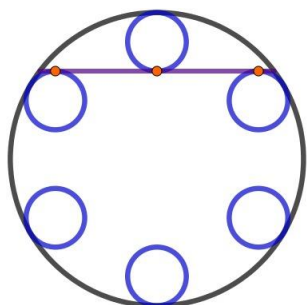
תשובה: 111

פתרון: נסמן את המשוואה הראשונה ב-(i) ואת השנייה ב-(ii)

$$(iii) = 2 * (i) - (ii): x + y + z + t = 2 * 34 - 57 = 68 - 57 = 11$$

$$(iv) = 7 * (i) - 4 * (ii): 3x + 2y + z = 7 * 34 - 4 * 57 = 238 - 228 = 10$$

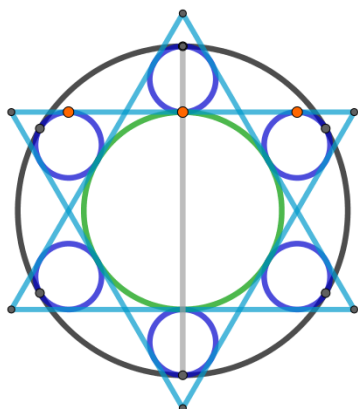
$$10 * (iv) + (iii): 31x + 21y + 11z + t = 10 * 10 + 11 = 111$$



6. רדיוס המעגל הגדול 120. המעגלים הקטנים כולם באותו גודל ומשיקים למעגל הגדול, נקודות ההשקה מחלקות את המעגל הגדול לחלקים שווים. שלוש הנקודות המסומנות בכתום נמצאות על ישר אחד. מצאו את הרדיוס של המעגלים הקטנים.

תשובה: 24

פתרון: נעביר עוד 5 ישרים משיקים באופן סימטרי, ונמשיך אותם עד החיתוכים עד שנקבל מגן דוד. נעביר גם מעגל ירוק שמשיק לכל הישרים האלה. רדיוס המעגל ירוק הוא



גדול פי 3 מהרדיוס של כל מעגל כחול (כי הוא חסום במשולש משוכלל שגדול יותר פי שלוש מהמשולשים המשוכללים שהמעגלים הכחולים חסומים בהם).

קוטר אנכי של מעגל שחור מורכב מקוטר של מעגל כחול, קוטר של מעגל ירוק ועוד קוטר של מעגל כחול, שזה כמו 5 פעמים הקוטר של המעגל הכחול.

לכן גם הרדיוס של המעגל השחור גדול פי 5 מהרדיוס של המעגל הכחול.