



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח שלב ב, שנת תשפ"ב - פתרונות

15				2
12				1
18				5
	9	6	5	

1. ממלאים טבלה על ידי מספרים מ-1 עד 9, כל מספר פעם אחת. ליד כל שורה, רושמים בשחור את המספר הקטן ביותר בשורה, ובכחול, בצד שני – את סכום המספרים בשורה. ליד כל עמודה, רושמים בשחור את המספר הגדול ביותר בעמודה. אחרי זה מוחקים את כל המספרים בתוך הטבלה. איזה מספר היה רשום במשבצת המסומנת בכתום?

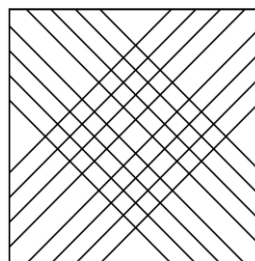
תשובה. 8

פתרון. המספר 5 נמצא גם בעמודה הימנית וגם בשורה התחתונה, לכן הוא בפינה שמאלית תחתונה. לכן

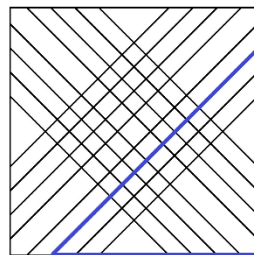
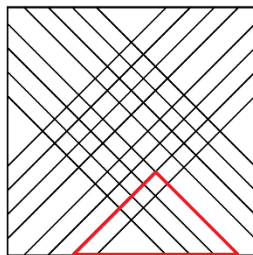
15				2
12				1
18	7	6	5	5
	9	6	5	

המספרים האחרים בעמודה הימנית גדולים מ-5, והמספרים האחרים בשורה האחרונה גדולים מ-5. המספר באמצע של העמודה האחרונה גדול מ-5 אבל לא גדול יותר מ-6, כי זה מה שרשום מתחת לעמודה האמצעית. לכן המספר באמצע של השורה האחרונה הוא 6. לפי סכום המספרים בשורה האחרונה, ניתן לראות כעת שבפינה השמאלית תחתונה רשום 7.

המספרים 8 ו-9 לא יכולים להיות עמודה הימנית או האמצעית, לכן הם בעמודה שמאלית, בפרט במשבצת הכתומה רשום 8 או 9. אבל הסכום בשורה האמצעית הוא 12, והמספרים האחרים הכי קטנים שיכולים להיות בשורה האמצעית הם 1 ו-3, הרי 2 בשורה הראשונה. לכן לו במשבצת הכתומה היה רשום 9, אז הסכום בשורה היה לפחות $9+3+1=13$ בניגוד לנתון. לכן במשבצת הכתומה רשום 8.



2. כמה משולשים יש בתמונה?



תשובה. 80.

פתרון. ישנם שני דרכים ליצור משולש:

א. עם שתי צלעות סמוכות של ריבוע וקו משופע.

ב. עם צלע של ריבוע ושני קווים משופעים בכיוונים שונים.

אכן, בשביל ליצור משולש צריך 3 ישרים עם כיוונים שונים, ויש רק 4 כיוונים בציור שלנו, אז צריך לבחור 3 מהם.

עבור סוג א', מספיק לבחור קו משופע, והוא חותך שתי צלעות ספציפיות של ריבוע, וזה קובע משולש אחד בדיוק. מכיוון שיש בציור 8 קווים משופעים בכל כיוון, יש 16 משולשים כאלה.

עבור סוג ב, יש לנו $8 \times 8 = 64$ נקודות חיתוך של קווים משופעים, מכל צומת כזה אפשר להעביר קרניים ב-4 כיוונים ורק שניים מהם חותכים אותו צלע, לכן כל צומת כזה נותן משולש אחד בדיוק.

בסה"כ מקבלים $64 + 16 = 80$.

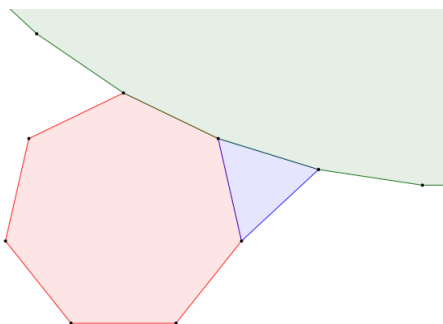


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח שלב ב, שנת תשפ"ב - פתרונות

3. מצאו את המספר k הגדול ביותר כך שלכל שני מספרים שלמים a, b המקיימים: $ab = 999$ בהכרח מתקיים: $k \leq (a - b)^2$.

תשובה. 100.

פתרון. ניתן להניח שהגורמים הם שלמים חיוביים; אם a ו- b שליליים, ניתן להחליף סימן לשניהם, ושום דבר לא ישתנה. נניח שקל לפרק את 999 לגורמים ראשוניים. אכן $999 = 111 \cdot 9$ וגם 111 מתחלק ב-3, לכן $999 = 37 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 37 \cdot 27$. המספר 37 הוא ראשוני. לכן אם $999 = a \cdot b$ אז אחד הגורמים מתחלק ב-37 והגורם האחר שלא מתחלק ב-37 הוא לכל היותר 27. לכן ההבדל בין הגורם הגדול לגורם הקטן הוא לפחות 10. לכן $100 = 10^2 \leq (a - b)^2$ והשוויון מתקבל כאשר a ו- b הם 27 ו-37 בסדר כלשהו.



4. בתמונה מצלע משוכלל בעל 7 צלעות בצבע אדום, משולש משוכלל בצבע כחול ומצולע משוכלל בעל n צלעות בצבע ירוק (שנכנס לתמונה באופן חלקי). מצאו את n .

תשובה. 42.

פתרון. סכום הזוויות במצולע עם n צלעות שווה ל- $180^\circ \cdot (n - 2)$.

ניתן לראות את זה כאשר מחלקים את המצולע ל- $n - 2$ משולשים על ידי אלכסונים. זאת אומרת שכל זווית של מצולע משוכלל עם n צלעות שווה ל- $180^\circ \cdot \frac{n - 2}{n}$.

למשולש משוכלל הזווית היא 60° , עבור מצולע משוכלל עם 7 צלעות הזווית היא $180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right)$. ביחד הזווית של משולש, מצולע משוכלל עם 7, ומצולע משוכלל עם n צריכים להרכיב זווית מלאה, כלומר:

$$60^\circ + 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) + 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \underline{\underline{360^\circ}}$$

לאחר קיזוז והעברת המספרים השליליים לאגף ימין נקבל:

$$60^\circ = 180^\circ \cdot \frac{2}{7} + 180^\circ \cdot \frac{2}{n}$$

$$1 = 3 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{2}{n}$$

$$\frac{1}{7} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{6}{n}$$

$$n = 6 \cdot 7 = 42$$

