



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו שלב ב, שנת תשפ"ב - פתרונות

1. ממלאים טבלה על ידי המספרים מ-1 עד 9, כל מספר פעם אחת. ליד כל שורה, רושמים בשחור את המספר הקטן ביותר בשורה, ובכחול, בצד שני – את סכום המספרים בשורה. מתחת לכל עמודה, רושמים בשחור את המספר הגדול ביותר בעמודה. אחרי זה מוחקים את כל המספרים בתוך הטבלה. איזה מספר היה רשום במשבצת המסומנת בכתום?

15				2
12				1
18				5
	9	6	5	

תשובה. 8

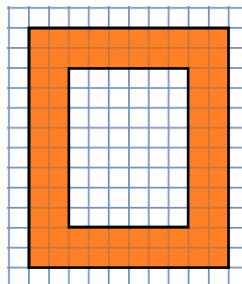
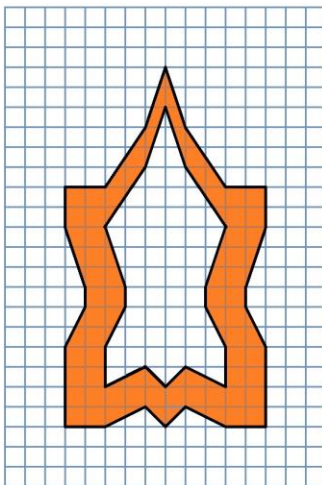
15				2
12				1
18	7	6	5	5
	9	6	5	

פתרון. המספר 5 נמצא גם בעמודה הימנית וגם בשורה התחתונה, לכן הוא בפינה שמאלית תחתונה. לכן המספרים האחרים בעמודה הימנית גדולים מ-5, והמספרים האחרים בשורה האחרונה גדולים מ-5. המספר באמצע של העמודה האחרונה גדול מ-5 אבל לא גדול יותר מ-6, כי זה מה שרשום מתחת לעמודה האמצעית. לכן המספר באמצע של השורה האחרונה הוא 6. לפי סכום המספרים בשורה האחרונה, ניתן לראות כעת שבפינה השמאלית תחתונה רשום 7.

המספרים 8 ו-9 לא יכולים להיות בעמודה הימנית או האמצעית, לכן הם בעמודה השמאלית, בפרט במשבצת הכתומה רשום 8 או 9. אבל הסכום בשורה האמצעית הוא 12, והמספרים האחרים הכי קטנים שיכולים להיות בשורה האמצעית הם 1 ו-3, הרי 2 בשורה הראשונה. לכן לו במשבצת הכתומה היה רשום 9, אז הסכום בשורה היה לפחות $9+3+1=13$ בניגוד לנתון. לכן במשבצת הכתומה רשום 8.

2. מהו השטח של המסגרת בתמונה (במשבצות)?

תשובה. 72



פתרון. בתמונה רואים בעצם 4 פינות שהן ריבועים 2×2 שמחוברות באמצעות שבילים שהם שרשראות של מקביליות עם בסיס 2. מכיוון ששטח המקבילית היא גובה כפול בסיס, לו היינו מחליפים כל מקבילית במלבן, היה יוצא אותו דבר עדיין.

אבל בצורה כזאת מקבלים מסגרת שמתקבלת כאשר בתוך מלבן 10×12 עושים חור מלבני 6×8 ושטחה שווה לה $10 \cdot 12 - 6 \cdot 8 = 12 \cdot (10 - 4) = 12 \cdot 6 = 72$.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו שלב ב, שנת תשפ"ב - פתרונות

3. בים הקסום חיים תמוננים בצבעים אדום, ירוק וכחול. כל תמונן חושב על הצבע של עצמו נכון, וגם על הצבע של האחרים שבצבע שלו. וכל שני תמוננים בצבע שונה חושבים זה על זה שזה הצבע השלישי. שואלים 100 תמוננים, כמה מכם אדומים. התשובה "20" התקבלה בדיוק 10 פעמים. כמה תמוננים מתוך ה-100 אכן אדומים?

תשובה. 70

פתרון. אם יש A אדומים, B ירוקים ו-C כחולים, אז כל אחד מ-A אדומים חושב שיש A אדומים, וכל אחד מ-B ירוקים חושב שיש C אדומים, וכל אחד מ-C כחולים חושבים שיש B אדומים. אם מישהו מהאדומים אמר "20", אז יש לפחות 20 אדומים, וכל 20 האדומים היו אומרים את זה, אבל האמירה הזאת התקבלה רק 10 פעמים. לכן מי שאמר 20 היה ירוק או כחול.

אם הוא היה ירוק, אז יש 20 כחולים, והם לא אומרים "20" כי יש רק 10 שאמרו 20. לכל כל מי שאמר 20 הוא ירוק, ויש 10 כאלה. ובכן, יש 20 כחולים, 10 ירוקים, ומה שנשאר זה 70 אדומים.

אם מי שאמר "20" היה כחול, אז מאותן סיבות בדיוק יש 20 ירוקים, 10 כחולים ו-70 אדומים.

4. נקרא למספר *נחמד*, אם כל הספרות שלו שונות ולא אפסיות, וכל הספרות חוץ מהאחרונה מתחלקות בספרה הבאה (למשל 63). מצאו את המספר הנחמד הגדול ביותר.

תשובה. 8421.

פתרון.

נראה כי 8421 הוא המספר הארבע ספרתי היחיד שכל ספרה שלו (חוץ מספרת היחידות) מתחלקת בספרה שמימינה, ואין מספרים ארוכים יותר בעלי תכונה זו. במספר הנחמד הגדול ספרת היחידות תהיה אחד, כי אחרת אנחנו יכולים פשוט להוסיף את ה-1 לרישום העשרוני של המספר מימין, והמספר יגדל כתוצאה מכך. ספרת העשרות חייבת להיות 2, כי ל-2 יש שתי כפולות נוספות לא אפסיות מתחת ל-10, ולכל ספרה חוץ מ-1 ומ-2 יש פחות. האפשרות היחידה לספרת המאות שמאפשרת את זה שתהיה למספר גם ספרת האלפים (כלומר, ספרה זוגית שונה מ-0 שיש ספרה לא אפסית אחרת שמתחלקת בה) היא 4. זה קובע באופן חד משמעי גם את ספרת האלפים: 8.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו שלב ב, שנת תשפ"ב - פתרונות

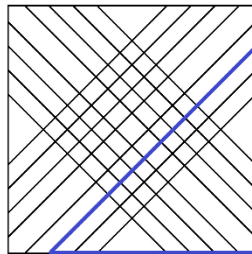
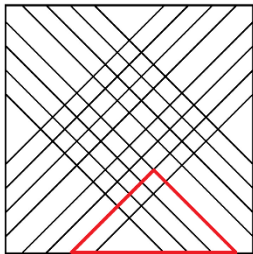
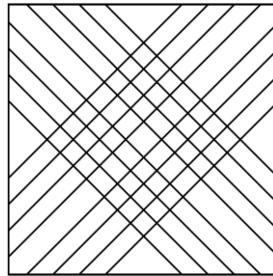
5. למלך יש 666 חיילים, כולם בגובה שונה. המלך סידר את החיילים במעגל. לכל חייל, בוחנים את חמישיית החיילים, המורכבת משני החיילים משמאלו, שני החיילים מימינו והחייל עצמו. אם החייל גבוה יותר משאר החיילים בחמישייה, הוא מקבל דגל, ואם הוא נמוך יותר משאר החיילים בחמישייה - הוא מקבל תוף. מהו המספר הקטן ביותר האפשרי של חיילים שלא יקבלו שום דבר?

תשובה. 222.

פתרון. בין כל 3 חיילים ברצף, רק אחד יכול להיות הכי גבוה ורק אחד יכול להיות הכי נמוך, לכן לפחות אחר לא יקבל כלום. מכיוון שאפשרי לחלק את 666 ל-222 שלישיות, ובכל שלישיה יש אחד שלא יקבל כלום, אז בכל מצב יש לפחות 222 שלא יקבלו כלום.

יש מצב שיהיו גם בדיוק 222 כאלה, למשל: אם יש 222 חיילים גבוהים, 222 בינוניים שיותר נמוכים מהם, ויש 222 נמוכים שעוד יותר נמוכים, ונסדר אותם כך: גבוה, בינוני, נמוך, גבוה, בינוני, נמוך, גבוה, בינוני, נמוך, גבוה, בינוני, נמוך, . . . אז בדיוק 222 לא יקבלו כלום.

6. כמה משולשים יש בתמונה?



תשובה. 80.

פתרון. ישנם שני דרכים ליצור משולש:

- עם שתי צלעות סמוכות של ריבוע וקו משופע.
- עם צלע של ריבוע ושני קווים משופעים בכיוונים שונים.

אכן, בשביל ליצור משולש צריך 3 ישרים עם כיוונים שונים, ויש רק 4 כיוונים בציור שלנו, אז צריך לבחור 3 מהם.

עבור סוג א', מספיק לבחור קו משופע, והוא חותך שתי צלעות ספציפיות של ריבוע, וזה קובע משולש אחד בדיוק. מכיוון שיש בציור 8 קווים משופעים בכל כיוון, יש 16 משולשים כאלה.

עבור סוג ב, יש לנו $8 \times 8 = 64$ נקודות חיתוך של קווים משופעים, מכל צומת כזה אפשר להעביר קרניים ב-4 כיוונים ורק שניים מהם חותכים אותו צלע, לכן כל צומת כזה נותן משולש אחד בדיוק.

בסה"כ מקבלים $64 + 16 = 80$.