



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב ב, שנת תשפ"ב - פתרונות

1. איילה, בלה, גלית, דנה והילה אספו פטריות ביער. כל אחת מהן קטפה מספר אי-זוגי של פטריות, שהוא מעל 20 אבל פחות מ-30. כל 5 המספרים שונים. מצאו את הכמות הכוללת של הפטריות שהן קטפו יחד.

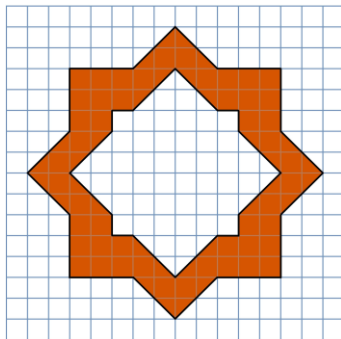
תשובה. 125

פתרון.

יש סך הכל 5 מספרים אי זוגיים בין 20 ל-30: 21, 23, 25, 27, 29, לכן אלה בדיוק הכמויות של הפטריות שהבנות קטפו.
 $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5 \cdot 25 = 125$

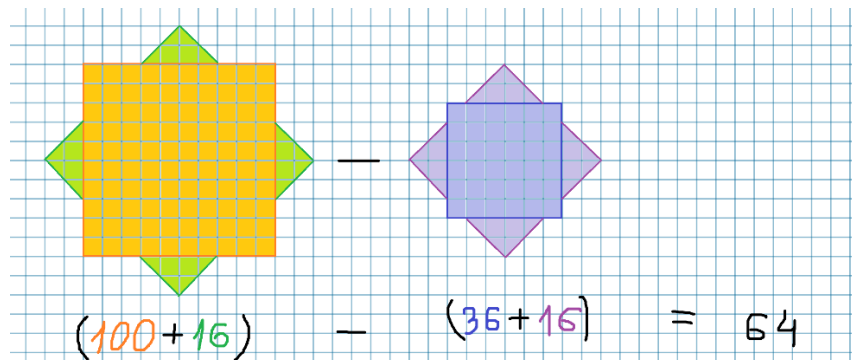
2. מהו השטח של המסגרת שבתמונה (במשבצות)?

תשובה. 64



פתרון 1.

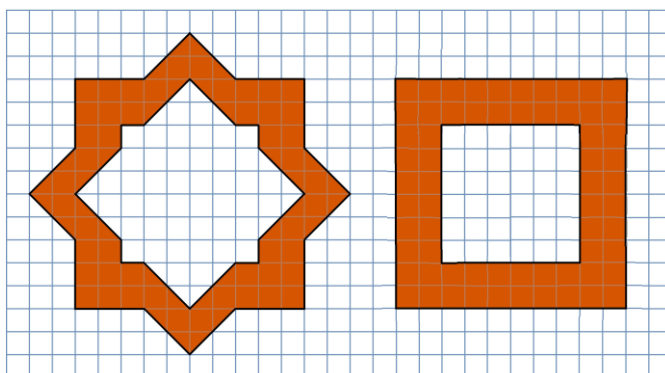
נחסיר מהשטח של הצורה הכוללת את השטח של החור:



פתרון 2.

בתמונה רואים בעצם 4 פינות שהן ריבועים 2×2 שמחוברות באמצעות שבילים שהם שרשראות של מקביליות עם בסיס 2. מכיוון ששטח המקבילית היא גובה כפול בסיס, לוינו מחליפים כל מקבילית במלבן, היה יוצא אותו דבר עדיין.

אבל בצורה כזאת מקבלים מסגרת שמתקבלת כאשר בתוך ריבוע 10×10 עושים חור ריבועי 6×6 ושטח שלה שווה ל- $10 \cdot 10 - 6 \cdot 6 = 64$.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב ב, שנת תשפ"ב - פתרונות

3. ממלאים טבלה על ידי המספרים מ-1 עד 9, כל מספר פעם אחת. ליד כל שורה, רושמים בשחור את המספר הקטן ביותר בשורה, ובכחול, בצד שני – את סכום המספרים בשורה. מתחת לכל עמודה, רושמים בשחור את המספר הגדול ביותר בעמודה. אחרי זה מוחקים את כל המספרים בתוך הטבלה. איזה מספר היה רשום במשבצת המסומנת בכתום?

15				2
12				1
18				5
	9	6	5	

תשובה. 8

15				2
12				1
18	7	6	5	5
	9	6	5	

פתרון. המספר 5 נמצא גם בעמודה הימנית וגם בשורה התחתונה, לכן הוא בפינה שמאלית תחתונה. לכן המספרים האחרים בעמודה הימנית גדולים מ-5, והמספרים האחרים בשורה האחרונה גדולים מ-5. המספר באמצע של העמודה האחרונה גדול מ-5 אבל לא גדול יותר מ-6, כי זה מה שרשום מתחת לעמודה האמצעית. לכן המספר באמצע של השורה האחרונה הוא 6. לפי סכום המספרים בשורה האחרונה, ניתן לראות כעת שבפינה השמאלית תחתונה רשום 7.

המספרים 8 ו-9 לא יכולים להיות בעמודה הימנית או האמצעית, לכן הם בעמודה השמאלית, בפרט במשבצת הכתומה רשום 8 או 9. אבל הסכום בשורה האמצעית הוא 12, והמספרים האחרים הכי קטנים שיכולים להיות בשורה האמצעית הם 1 ו-3, הרי 2 בשורה הראשונה. לכן לו במשבצת הכתומה היה רשום 9, אז הסכום בשורה היה לפחות $9+3+1=13$ בניגוד לנתון. לכן במשבצת הכתומה רשום 8.

4. נקרא למספר *נחמד*, אם כל הספרות שלו שונות ולא אפסיות, וכל הספרות חוץ מהאחרונה מתחלקות בספרה הבאה (למשל 63). מצאו את המספר הנחמד הגדול ביותר.

תשובה. 8421

פתרון.

נראה כי 8421 הוא המספר הארבע ספרתי היחיד שכל ספרה שלו (חוץ מספרת היחידות) מתחלקת בספרה שמימינה, ואין מספרים ארוכים יותר בעלי תכונה זו. במספר הנחמד הגדול ספרת היחידות תהיה אחד, כי אחרת אנחנו יכולים פשוט להוסיף את ה-1 לרישום העשרוני של המספר מימין, והמספר יגדל כתוצאה מכך. ספרת העשרות חייבת להיות 2, כי ל-2 יש שתי כפולות נוספות לא אפסיות מתחת ל-10, ולכל ספרה חוץ מ-1 ומ-2 יש פחות. האפשרות היחידה לספרת המאות שמאפשרת את זה שתהיה למספר גם ספרת האלפים (כלומר, ספרה זוגית שונה מ-0 שיש ספרה לא אפסית אחרת שמתחלקת בה) היא 4. זה קובע באופן חד משמעי גם את ספרת האלפים: 8.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב ב, שנת תשפ"ב - פתרונות

5. בים הקסום חיים תמנונים בצבעים אדום, ירוק וכחול. כל תמנון מבין נכון מה הצבע שלו ומה הצבע של תמנונים אחרים באותו הצבע. לגבי כל תמנון בצבע אחר, התמנון חושב שהוא בצבע השלישי (למשל, תמנון אדום חושב על תמנון כחול שהוא ירוק). שואלים 100 תמנונים: "כמה מכם אדומים?". התשובה "20" התקבלה בדיוק 10 פעמים. כמה תמנונים מתוך ה-100 אכן אדומים?

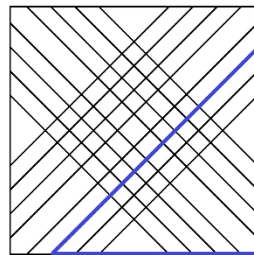
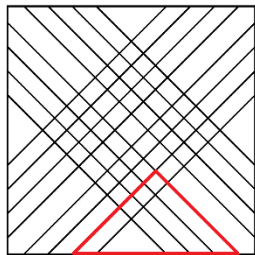
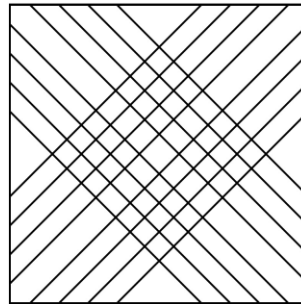
תשובה. 70

פתרון. אם יש A אדומים, B ירוקים ו-C כחולים, אז כל אחד מ-A אדומים חושב שיש A אדומים, וכל אחד מ-B ירוקים חושב שיש C אדומים, וכל אחד מ-C כחולים חושבים שיש B אדומים. אם מישהו מהאדומים אמר "20", אז יש לפחות 20 אדומים, וכל 20 האדומים היו אומרים את זה, אבל האמירה הזאת התקבלה רק 10 פעמים. לכן מי שאמר 20 היה ירוק או כחול.

אם הוא היה ירוק, אז יש 20 כחולים, והם לא אומרים "20" כי יש רק 10 שאמרו 20. לכל כל מי שאמר 20 הוא ירוק, ויש 10 כאלה. ובכן, יש 20 כחולים, 10 ירוקים, ומה שנשאר זה 70 אדומים.

אם מי שאמר "20" היה כחול, אז מאותן סיבות בדיוק יש 20 ירוקים, 10 כחולים ו-70 אדומים.

6. כמה משולשים יש בתמונה?



תשובה. 80.

פתרון. ישנם שני דרכים ליצור משולש:

- א. עם שתי צלעות סמוכות של ריבוע וקו משופע.
- ב. עם צלע של ריבוע ושני קווים משופעים בכיוונים שונים.

אכן, בשביל ליצור משולש צריך 3 ישרים עם כיוונים שונים, ויש רק 4 כיוונים בציור שלנו, אז צריך לבחור 3 מהם.

עבור סוג א', מספיק לבחור קו משופע, והוא חותך שתי צלעות ספציפיות של ריבוע, וזה קובע משולש אחד בדיוק. מכיוון שיש בציור 8 קווים משופעים בכל כיוון, יש 16 משולשים כאלה.

עבור סוג ב, יש לנו $8 \times 8 = 64$ נקודות חיתוך של קווים משופעים, מכל צומת כזה אפשר להעביר קרניים ב-4 כיוונים ורק שניים מהם חותכים אותו צלע, לכן כל צומת כזה נותן משולש אחד בדיוק.

בסה"כ מקבלים $64 + 16 = 80$.