<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח</u>
שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

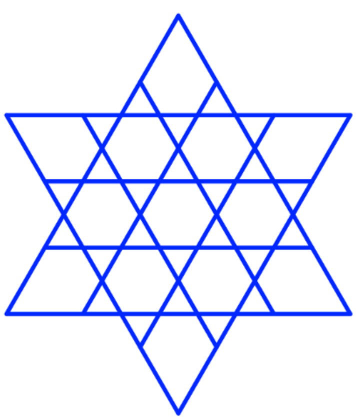
1. בטבלה הבאה בכל משבצת היה רשום מספר טבעי, כך שסכום המספרים בכל שורה יוצא זהה, וגם סכום המספרים בכל עמודה יוצא זהה (אבל סכומי שורות לא חייבים להיות שווים לסכומי עמודות). חלק מהמספרים נמחקו. מצאו את הסכום של המספרים החסרים.

1			
2	1		
A	3	2	1

פתרון. נניח שסכום המספרים בכל שורה זה 4X. אז סכום המספרים הכולל בטבלה הוא 12X. אז סכום בכל עמודה הוא 3X. נסמן את המספרים החסר בשורה האחרונה A. אז לפי סכום בשורה האחרונה ובעמודה השמאלית:

$$6+A=4X$$
$$3+A=3X$$

אם נחסיר בין שתי המשוואות נקבל $X=3$. סכום המספרים הכולל בטבלה הוא $12X=45$.
סכום המספרים הנתונים בטבלה הוא 10, לכן סכום המספרים החסרים הוא $45-10=35$.



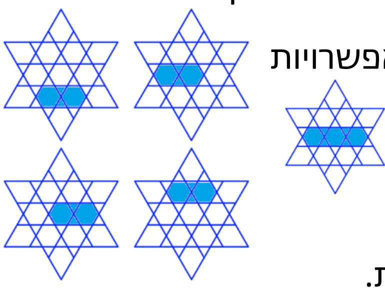
2. נגדיר "צורת מגן דויד" כצורה גיאומטרית המורכבת מ-2 משולשים שצלעותיהם נחתכים ב-6 נקודות. כמה צורות מגן דוד יש בתמונה הבאה:

פתרון. מגן דוד הוא בעצם משושה שהמשיכו את הצלעות שלו. דרך אחרת לחשוב עליו זה לבחור 3 זוגות של ישרים מקבילים, בצורה מסוימת. בציור שלנו יש 3 כיוונים של ישרים, לכן צריך שני ישרים בכל כיוון. זה כולל גם שני ישרים אופקיים. אם נבחר שני ישרים אופקיים סמוכים, נגיד שיש לו **גובה 1**, אם מדובר על שני ישרים אופקיים לא סמוכים אבל לא הכי רחוקים, נגיד שיש לו **גובה 2**, ואם זה שני ישרים אופקיים הכי רחוקים, נגיד שזה **גובה 3**. בדומה, אם יש למגן דוד שני ישרים מקבילים הכי קרובים באיזשהו כיוון שהם הכי קרובים, נגיד שיש להם רוחב 1 באיזשהו כיוון ובדומה.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח</u>

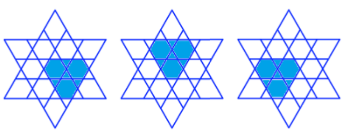
שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

נתחיל ממגני דוד בגובה 1. אם זה גם רוחב 1 בכל כיוון, נקבל 7 אפשרויות למגן דוד.



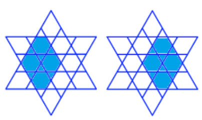
אם יש גובה 1 אבל רוחב יותר גדול בכיוונים אחרים, זה נותן 4 אפשרויות לרוחב 2 ואפשרות יחידה ברוחב 3, סה"כ 5 אפשרויות. לכן אם יש גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון ורוחב או גובה שונה מ- 1 בכיוון אחר, אז יש 15 אפשרויות לזה (הרי זה פי 3).

לכן אם יש גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון, יוצא 22=7+15 אפשרויות.



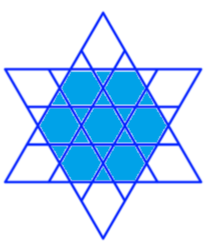
נשאר לספור מקרים שגובה ורוחב בכל כיוון גדולים מ-1. אם גובה ורוחב בכל כיוון שווה ל-2, מקבלים שהמשושה נראה קצת כמו משולש; הוא יכול להיות כמו משולש שמכוון מטה ואז יש 3 אפשרויות והוא יכול להיות מכוון הפוך וזה עוד 3 אפשרויות, בסה"כ 6 אפשרויות.

נשארו המקרים שגובה או אורך באחד הכיוונים הוא 3.



נניח שגובה 3 ורוחב בכל כיוון הוא 2. נקבל משושה שנראה כמו מעוין, ווזה נותן 2 אפשרויות. עם סיבובים של מצבים כאלה נקבל בסה"כ 6 אפשרויות.

אם הגובה והרוחב בכיוונים שונים הם 2, 3, ו-3 אז צריך לקחת את ש הישרים הכי קיצוניים בכל הכיוונים וישר אחד שהוא לא הכי קיצוני אבל קרוב להכי קיצוני. משושה שמקבלים במצב זה הוא דומה לטרפז, ועם סיבובים אפשר לקבל בדיוק 6 מצבים לזה.



נשאר המקרה שבו רוחב וגובה הוא 3 ואז פשוט לוקחים ישר קיצוני בכל כיוון.

נסכם: יש 22 מקרים שיש בהם גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון.

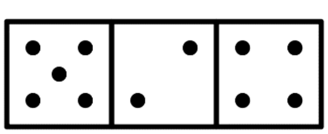
יש 6 מקרים שגובה ורוחב בכל כיוון הוא 2,

יש 6+6 מקרים שבהם המספרים של רוחב וגובה חלקם 2 וחלקם 3,

ויש מקרה 1 שבו גובה ורוחב בכל כיוון הוא 3.

בסה"כ 22+6+6+6+1 שזה שווה ל-22+18+1 שזה 41.

3. במשחק יש כלים שדומים לדומינו, אך מורכבים מ-3 משבצות, בכל משבצת יש מ-0 עד 6 נקודות (ראו ציור).במה כלי המשחק שונים יכולים להיות?

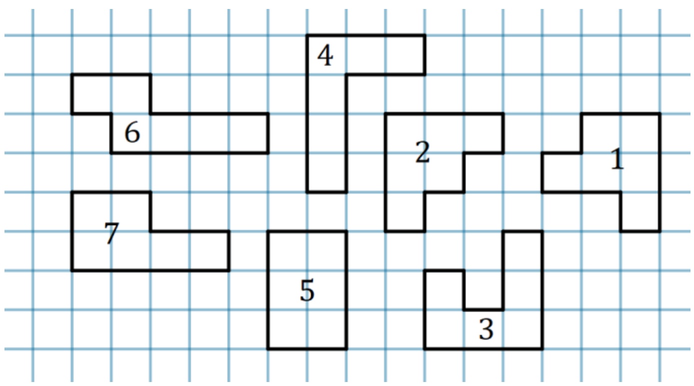


תשובה. 196

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח
שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

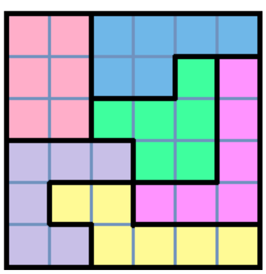
פתרון. כאשר מסתכלים על שלישייה של מספרים מ-0 עד 6 מקבלים $7^3 = 343$ אפשרויות.
אבל כל שלישיה ניתן להפוך, לכן את רוב האבנים כאן ספרנו פעמיים. אבל לא כולם, יש אבנים שנשארים באותה צורה כאשר הופכים אותם, ויש $7^2 = 49$ כאלה. לכן אם ניקח $343+49=392$, אז באמת יצא שכל אבן נספרת פעמיים. נחלק ב-2 ונקבל שהתשובה היא 196.

4. למרים יש 7 צורות מקרטון:
היא הרכיבה ריבוע מ-6 מהצורות. באיזו מהצורות מרים לא השתמשה?
הערה: כל צורה הופיע פעם אחד בריבוע, בריבוע אין חורים והצורות לא עולות זו על זו ולא יוצאות מחוץ לריבוע. מותר לסובב ולהפוך את הצורות.



תשובה. בצורה 2.

פתרון. בכל צורה יש 6 משבצות, לכן בריבוע יש 36 משבצות. אם צובעים את הריבוע בצביעת שח, יש אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות.
חוץ מצורה 2, כל צורה מכסה אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות,
חוץ מצורה2 שתכסה שתי משבצות מצבע אחת ו-4 משבצות מצבע אחר.
לכן לא יתכן שיש צורה 2 וחמש צורות אחרות, כי אז כיסינו כמות שונה של משבצות שחורות ולבנות וצריכה להיות אותה כמות.
ניתן לראות שללא צורה שנייה אבן אפשר לרצף, למשל כמו בציור.



5. איילה וברק גרים בבתים A ו-B במפה הבאה:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	10	5	5	5	5	5	5	5	1
1	5	10	5	5	5	5	B	5	1
1	5	5	10	5	5	5	2	5	1
1	5	5	5	10	5	5	2	2	1
1	2	2	5	5	10	5	5	5	1
1	5	2	5	5	5	10	5	5	1
1	5	A	5	5	5	5	10	5	1
1	5	5	5	5	5	5	5	10	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

איילה יכולה לעבור ממשבצת למשבצת סמוכה לפי צלע. בכניסה לכל משבצת היא חייבת לשלם מספר מטבעות זהב כמספר שכתוב במשבצת. מה המספר הקטן ביותר של מטבעות שהיא תצטרך לשלם כדי להגיע לבית של ברק?

תשובה: 24.

פתרון. במחיר של 4 לכל היותר, איילה וברק יכולים להגיע רק למשבצות הכחולות. לכן במחיר עד 6 אפשר להגיע רק למשבצות כחולות או ירוקות. מכאן אפשר להבין שבמחיר עד 11 ניתן להגיע רק למשבצות כתובות (או

המשבצות שניתן להגיע אליהם בצעד אחד מהמשבצות הירוקות, או ב-5 צעדים לאורך המסגרת כשמתחילים מהמשבצות הירוקות). רואים שצריך להוסיף לפחות שתי מטבעות בשביל לחבר בין משבצות כתומות של איילה למשבצות כתומות של ברק, ואפשר לעשות את זה בשתי דרכים (לעבור באחת הפינות). זאת אומרת שבמינימום של 24 מטבעות אפשר מהבית של איילה להגיע למשבצת כתומה ליד פינה, ובעוד שתי פינות להתקרב למשבצת כתומה של ברק, ומשם להגיע לבית של ברק.

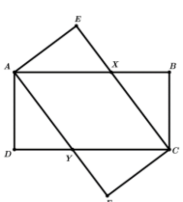
6. חשבו:

$$(1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+99\cdot 100)-(1+2\cdot 3+4\cdot 5+\cdots+98\cdot 99+100)$$

פתרון. לאחר צמצום נקבל

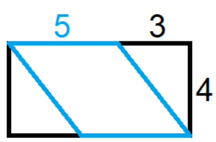
$$1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\ldots+99\cdot 100-1-100=$$
$$=(2\cdot 2-2)+(4\cdot 4-4)+(6\cdot 6-6)+\ldots+(100\cdot 100-100)-101=$$
$$=4\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+50^2\right)-2\cdot(1+2+\ldots+50)-101=$$
$$=4\cdot\frac{50\cdot 51\cdot 101}{6}-2\cdot\frac{50\cdot 51}{2}-101=100\cdot 17\cdot 101-50\cdot 51-101=$$
$$=171700-2550-101=171700-2651=169049$$

כאן השתמשנו בנוסחאות $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ו- $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.



7. נתונים מלבנים חופפים $ABCD$ ו- $AECF$. הקטעים AB ו-EC נפגשים בנקודה X, הקטעים AF ו-DC נפגשים בנקודה Y. נתון כי $AB=8$, $BC=4$.
מצאו את שטח המרובע $AXCY$.

תשובה. 44.



פתרון ראשון. נבחר נקודה על הצד העליון האופקי של מלבן 8×4 שתהיה במרחק 5 מהקצה השמאלי ובמרחק 3 מהקצה הימני. לפי משפט פיתגורס, המרחק ממנה לקודקוד שמאלי תחתון הוא 5. לכן ביחד עם שני קודקודים, ונקודה סימטרית על הצלע התחתון, מקבלים 4 קודקודים של מעוין שכל צלעותיו באורך 5. מעוין זה צורה סימטרית. לכן אם נשקף את המקבילית ביחס לאלכסון הארוך נקבל את המלבן האחר מהשאלה. שטח

המעוין הוא $5\cdot 4=20$ (גובה כפול בסיס), שטח של כל מלבן הוא 32, ושטח שהמלבנים מכסים זה סכום השטחים פחות החיתוך כלומר $32+32-20=44$.

פתרון שני. נניח ולא מנחשים שהמרחק מנקודת חיתוך עד הקצה השמאלי הוא 5, ונגיד שהמרחק הוא x. מכיוון שבחיתוך אמור להיות מעוין, לפי משפט פיתגורס נקבל כי הצלע המשופע של המעוין בריבוע שווה ל- $(8-x)^2+4^2$, ומכיוון שהצלעות של המעוין אמורות להיות שוות מקבלים משוואה:

$$(8-x)^2+4^2=x^2$$

$$64-16x+\cancel{x^2}+16=\cancel{x^2}$$

$$80=16x$$

$$5=x$$

מכאן אפשר לסיים כמו בפתרון הראשון.