



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו  
 שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

1. יוסי צייר טבלה בגודל  $4 \times 4$  ורשם במשבצות שלה מספרים, כך שכל שמונה הסכומים בשורות ובעמודות של הטבלה יצאו שווים. דני מחק חלק מהמספרים, ועכשיו הטבלה נראית כך:

		5	
			4
6	3	2	1

מצאו את הסכום של המספרים המחוקים.

**פתרון.** סכום המספרים בשורה האחרונה הוא 12. לכן סכום המספרים ב-3 שורות הראשונות הוא 36. בשורות אלה יש 4, 5 וכל המספרים המחוקים, לכן סכום המספרים המחוקים שווה ל- $36 - 9 = 27$ .

2. בתרגיל הבא צורות שונות מחליפות ספרות שונות, וצורות זהות מחליפות ספרות זהות:

		■	●	▲	■
			■	●	▲
	+			■	●
					■
		5	7	8	2

מצאו את המספר ■●▲■.

תשובה. 5205

פתרון.

$■●▲■ + ■●▲ + ■● + ■ = 1111 \cdot ■ + 111 \cdot ● + 11 \cdot ▲ + ■$   
 כדי שהסכום יתחיל ב-5, הריבוע צריך להיות 4 או 5. אבל אם הוא יהיה 4, לא נוכל להגיע למספר 5782 גם אם העיגול והמשולש יהיו גדולים ככל האפשר: המקסימום יהיה  $4444 + 5535 = 9999$ . לכן,

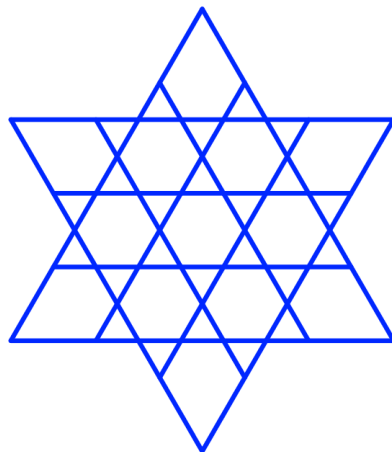
$$111 \cdot ● + 11 \cdot ▲ = 222$$

מכאן, האפשרות היחידה היא שהעיגול שווה ל-2, והמשולש שווה ל-0.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-10 שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

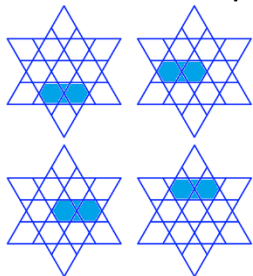
3. נגדיר "צורת מגן דויד" כצורה גיאומטרית המורכבת מ-2 משולשים שצלעותיהם נחתכים ב-6 נקודות. כמה צורות מגן דוד יש בתמונה הבאה:



**פתרון.** מגן דוד הוא בעצם משושה שהמשיכו את הצלעות שלו. דרך אחרת לחשוב עליו זה לבחור 3 זוגות של ישרים מקבילים, בצורה מסוימת. בציור שלנו יש 3 כיוונים של ישרים, לכן צריך שני ישרים בכל כיוון. זה כולל גם שני ישרים אופקיים. אם נבחר שני ישרים אופקיים סמוכים, נגיד שיש לו **גובה 1**, אם מדובר על שני ישרים אופקיים לא סמוכים אבל לא הכי רחוקים, נגיד שיש לו **גובה 2**, ואם זה שני ישרים אופקיים הכי רחוקים, נגיד שזה **גובה 3**. בדומה, אם יש למגן דוד שני ישרים מקבילים הכי קרובים באיזשהו כיוון שהם הכי קרובים, נגיד שיש להם רוחב 1 באיזשהו כיוון וכדומה.

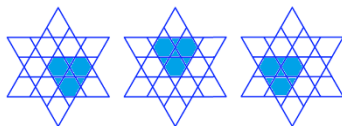


נתחיל ממגני דוד בגובה 1. אם זה גם רוחב 1 בכל כיוון, נקבל 7 אפשרויות למגן דוד.



אם יש גובה 1 אבל רוחב יותר גדול בכיוונים אחרים, זה נותן 4 אפשרויות לרוחב 2 ואפשרות יחידה ברוחב 3, סה"כ 5 אפשרויות. לכן אם יש גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון ורוחב או גובה שונה מ-1 בכיוון אחר, אז יש 15 אפשרויות לזה (הרי זה פי 3).

לכן אם יש גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון, יוצא  $22 = 7 + 15$  אפשרויות.

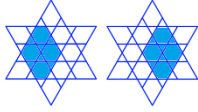


נשאר לספור מקרים שגובה ורוחב בכל כיוון גדולים מ-1. אם גובה ורוחב בכל כיוון שווה ל-2, מקבלים שהמשושה נראה קצת כמו משולש; הוא יכול להיות כמו משולש שמכוון מטה ואז יש 3 אפשרויות והוא יכול להיות מכוון הפוך וזה עוד 3 אפשרויות, בסה"כ 6 אפשרויות.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-1 שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

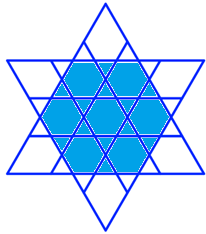
נשאר המקרים שגובה או אורך באחד הכיוונים הוא 3.



נניח שגובה 3 ורוחב בכל כיוון הוא 2. נקבל משושה שנראה כמו מעוין, וזזה נתן 2 אפשרויות. עם סיבובים של מצבים כאלה נקבל בסה"כ 6 אפשרויות.



אם הגובה והרוחב בכיוונים שונים הם 2, 3, ו-3 אז צריך לקחת את ש הישרים הכי קיצוניים בכל הכיוונים וישר אחד שהוא לא הכי קיצוני אבל קרוב להכי קיצוני. משושה שמקבלים במצב זה הוא דומה לטרפז, ועם סיבובים אפשר לקבל בדיוק 6 מצבים לזה.



נשאר המקרה שבו רוחב וגובה הוא 3 ואז פשוט לוקחים ישר קיצוני בכל כיוון. נסכם: יש 22 מקרים שיש בהם גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון.

יש 6 מקרים שגובה ורוחב בכל כיוון הוא 2,

יש 6+6 מקרים שבהם המספרים של רוחב וגובה חלקם 2 וחלקם 3,

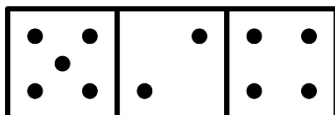
ויש מקרה 1 שבו גובה ורוחב בכל כיוון הוא 3.

בסה"כ  $1+6+6+6+22$  שזה שווה ל- $1+18+22$  שזה 41.

**4.** בשק 100 כדורים ב-4 צבעים: אדום, ירוק, כחול וצהוב. אם נוציא מהשק 50 כדורים כלשהם, בוודאות יהיה ביניהם לפחות כדור אחד כחול או צהוב. אם נוציא מהשק 70 כדורים כלשהם, בוודאות יהיו ביניהם לפחות שני כדורים אדומים. מהו המספר הגדול ביותר של כדורים ירוקים שיכולים להיות בשק?

**תשובה. 17**

**פתרון.** יש לפחות 32 כדורים אדומים, אחרת היה אפשר להוציא 70 כדורים שאין בהם שני אדומים. יש לפחות 51 כדורים צהובים וכחולים, אחרת היה אפשר להוציא 50 כדורים שאין בהם כחול או צהוב. בעצם אלה טענות שקולות למה שנתון בשאלה. אם נסכם, נקבל שיש לפחות 83 כדורים בצבעים אדום, צהוב וכחול, כלומר כאלה שהם לא ירוק. לכן יש לכל היותר 17 כדורים ירוקים.



**5.** במשחק יש כלים שדומים לדומינו, אך מורכבים מ-3 משבצות,

בכל משבצת יש מ-0 עד 6 נקודות (ראו ציור).

כמה כלי המשחק שונים יכולים להיות?

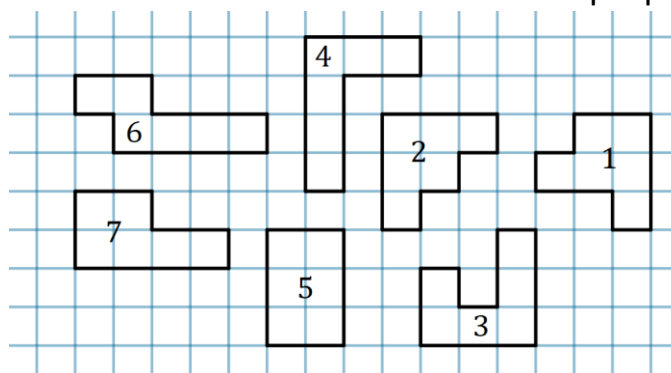


## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

תשובה. 196

**פתרון.** כאשר מסתכלים על שלישייה של מספרים מ-0 עד 6 מקבלים  $7^3 = 343$  אפשרויות. אבל כל שלישייה ניתן להפוך, לכן את רוב האבנים כאן ספרנו פעמיים. אבל לא כולם, יש אבנים שנשארים באותה צורה כאשר הופכים אותם, ויש  $7^2 = 49$  כאלה. לכן אם ניקח  $343 + 49 = 392$ , אז באמת יצא שכל אבן נספרת פעמיים. נחלק ב-2 ונקבל שהתשובה היא 196.

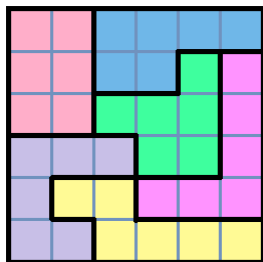
6. למרים יש 7 צורות מקרטון:



היא הרכיבה ריבוע מ-6 מהצורות. באיזו מהצורות מרים לא השתמשה?  
הערה: כל צורה הופיעה פעם אחד. בריבוע אין חורים והצורות לא עולות זו על זו ולא יוצאות מחוץ לריבוע. מותר לסובב ולהפוך את הצורות.

תשובה. 2

**פתרון.** בכל צורה יש 6 משבצות, לכן בריבוע יש 36 משבצות. אם צובעים את הריבוע בצביעת שח, יש אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות. חוץ מצורה 2, כל צורה מכסה אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות, חוץ מצורה 2 שתכסה שתי משבצות מצבע אחת ו-4 משבצות מצבע אחר. לכן לא יתכן שיש צורה 2 וחמש צורות אחרות, כי אז כיסינו כמות שונה של משבצות שחורות ולבנות וצריכה להיות אותה כמות. ניתן לראות שללא צורה שנייה אכן אפשר לרצף, למשל כמו בציור.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו  
 שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

7. איילה וברק גרים בבתיים A ו-B במפה הבאה:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	10	5	5	5	5	5	5	5	5	1
1	5	10	5	5	5	5	B	5	5	1
1	5	5	10	5	5	5	2	5	5	1
1	5	5	5	10	5	5	2	5	2	1
1	2	2	5	5	10	5	5	5	5	1
1	5	2	5	5	5	10	5	5	5	1
1	5	A	5	5	5	5	10	5	5	1
1	5	5	5	5	5	5	5	10	5	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

איילה יכולה לעבור מכל משבצת למשבצת סמוכה לפי צלע. בכניסה לכל משבצת היא חייבת לשלם מספר מטבעות זהב כמספר שכתוב במשבצת. מה המספר הקטן ביותר של מטבעות שהיא תצטרך לשלם כדי להגיע לבית של ברק?

תשובה: 24.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	10	5	5	5	5	5	5	5	5	1
1	5	10	5	5	5	5	B	5	5	1
1	5	5	10	5	5	5	2	5	5	1
1	5	5	5	10	5	5	2	5	2	1
1	2	2	5	5	10	5	5	5	5	1
1	5	2	5	5	5	10	5	5	5	1
1	5	A	5	5	5	5	10	5	5	1
1	5	5	5	5	5	5	5	10	5	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**פתרון.** במחיר של 4 לכל היותר, איילה וברק יכולים להגיע רק למשבצות הכחולות. לכן במחיר עד 6 אפשר להגיע רק למשבצות כחולות או ירוקות. מכאן אפשר להבין שבמחיר עד 11 ניתן להגיע רק למשבצות כתובות (או המשבצות שניתן להגיע אליהם בצעד אחד מהמשבצות הירוקות, או ב-5 צעדים לאורך המסגרת כשמתחילים מהמשבצות הירוקות). רואים שצריך להוסיף לפחות שתי מטבעות בשביל לחבר בין משבצות כתומות של איילה למשבצות כתומות של ברק, ואפשר לעשות את זה בשתי דרכים (לעבור באחת הפינות). זאת אומרת שבמינימום של 24 מטבעות אפשר מהבית של איילה להגיע למשבצת כתומה ליד פינה, ובעוד שתי פינות להתקרב למשבצת כתומה של ברק, ומשם להגיע לבית של ברק.