



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

1. במשחק טלוויזיה "מי רוצה לזכות בפרס" מראים לשחקן 4 תיבות, שבאחת מהן נמצא הפרס, ושאר ריקות. על התיבות יש כתוביות: על התיבה עם הפרס כתוב אמת, ועל התיבות הריקות כתוב שקר.

תיבה 1: הפרס בתיבה 2

תיבה 2: הפרס בתיבה 3

תיבה 3: הפרס בתיבה הזאת

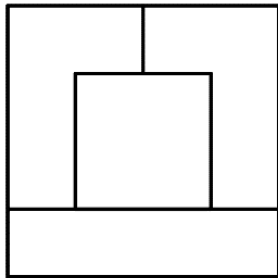
תיבה 4: הפרס לא בתיבה 3

באיזו תיבה נמצא הפרס?

תשובה. 4.

פתרון.

אילו הפרס היה בתיבה 1, הכתובית על התיבה הייתה שקר, כי יש רק תיבה אחת עם פרס – לכן הפרס לא בתיבה 1. אילו הפרס היה בתיבה 2, הכתובית על התיבה הייתה שקר – לכן הפרס לא בתיבה 2. מכאן, הכתובית על התיבה 2 היא שקר, כלומר הפרס גם לא בתיבה 3. התיבה היחידה שנשארת זה 4. ואכן, אם הפרס נמצא בתיבה 4, אין שום סתירות. לכן הפרס בוודאות בתיבה 4.

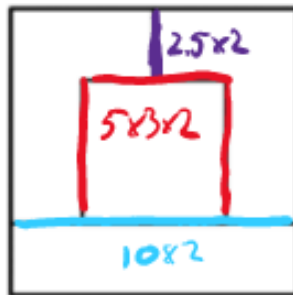


2. ריבוע בעל צלע באורך 10 מחולק ל-4 חלקים שווים שטח כמתואר בציור. החלק האמצעי הוא ריבוע, והחלק התחתון הוא מלבן. מצאו את סכום ההיקפים של כל ארבעה החלקים.

תשובה. 95.

פתרון.

שטח הריבוע הגדול הוא 100, לכן שטח של כל חלק הוא 25. מכאן, גובה המלבן הוא 2.5, צלע הריבוע הוא 5. שימו לב, שכל אחד מהקטעים הצבעוניים בציור משתתף בהיקפים של שתי צורות, לכן הוא צריך להיכנס לסכום הכולל פעמיים. מוסיפים לזה את 40, שזה ההיקף של הריבוע המקורי, ומגיעים לתשובה.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

3. יוסי צייר טבלה בגודל 3×3 ורשם במשבצות שלה מספרים, כך שכל שישה הסכומים בשורות ובעמודות של הטבלה יצאו שווים. דני מחק חלק מהמספרים, ועבשיו הטבלה נראית כך:

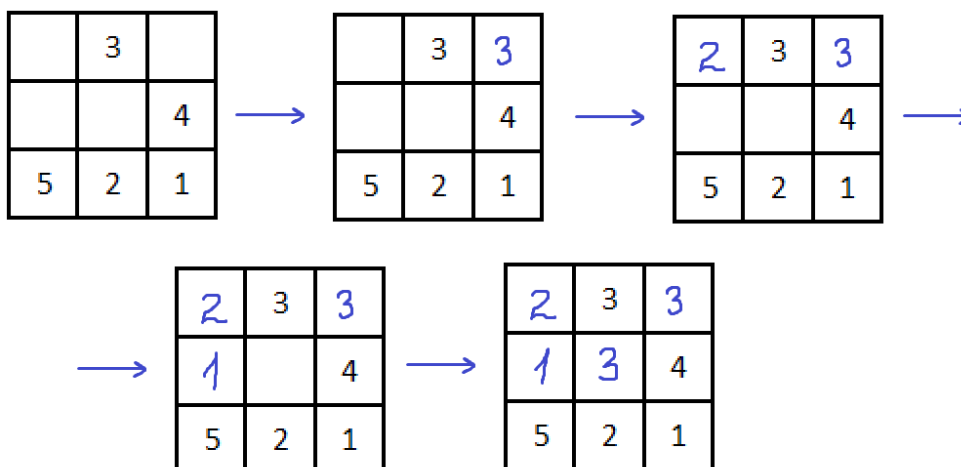
	3	
		4
5	2	1

מצאו את הסכום של המספרים המחוקים.

תשובה. 9

פתרון.

ניתן לשחזר את הטבלה באופן חד משמעי. שימו לב, שסכום בשורה\עמודה שווה 8.



הערה. ניתן להגיע לתשובה גם בלי לשחזר את כל המספרים. שימו לב שסכום המספרים בשתי השורות הראשונות שווה ל- $16 = 2 \cdot 8$, ומתוך הסכום הזה, המספרים 3 ו-4 כבר כתובים. לכם סכום המספרים החסרים זה $16 - 3 - 4 = 9$

4. איכר הולך מכפר א' לכפר ב'. הוא יצא לדרך ב-6 בבוקר והלך במהירות קבועה. בשעה 8 בבוקר הוא פגש שני חוטבי עצים ושאל אותם כמה רחוק כפר ב'.
- בעוד 12 קילומטרים תהיה באמצע הדרך בין כפר א' לכפר ב', - אמר אחד מהם.
- אם תמשיך ללכת באותו הקצב, תגיע לכפר ב' בשעה ארבע אחרי הצהרים, - הוסיף חוטב העצים השני.
מהו המרחק בין כפר א' לכפר ב'?

תשובה. 40

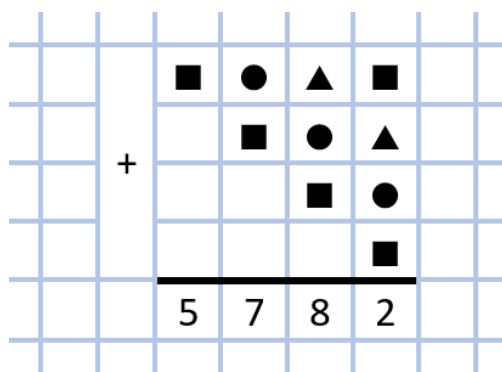


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

פתרון.

לפי דבריו של חוטב עצים השני, הדרך מכפר א' לכפר ב' לוקחת לאיכר 10 שעות. הוא דיבר עם חוטבי העצים בשעה 8:00, כלומר, כאשר הוא היה בדרך שעתיים, כלומר, נשארו לו 3 שעות עד אמצע הדרך. כמו שחוטב עצים הראשון אמר, האיכר יעבור תוך 3 השעות האלה 12 קילומטרים. זה אומר שהמהירות שלו $4 = 12 : 3$ קמ"ש. ובגלל שהדרך כולה לוקחת 10 שעות, אורכה $40 = 10 \cdot 4$ קילומטרים.

5. בתרגיל הבא צורות שונות מחליפות ספרות שונות, וצורות זהות מחליפות ספרות זהות.



מצאו את המספר ■●▲■.

תשובה. 5205

פתרון.

$$\blacksquare \bullet \blacktriangle \blacksquare + \blacksquare \bullet \blacktriangle + \blacksquare \bullet + \blacksquare = 1111 \cdot \blacksquare + 111 \cdot \bullet + 11 \cdot \blacktriangle + \blacksquare$$

כדי שהסכום יתחיל ב-5, הריבוע צריך להיות 4 או 5. אבל אם הוא יהיה 4, לא נוכל להגיע למספר 5782 גם אם העיגול והמשולש יהיו גדולים ככל האפשר: המקסימום יהיה $4444 + 999 + 88 + 4 = 5535$. לכן,

$$111 \cdot \bullet + 11 \cdot \blacktriangle = 222$$

מכאן, האפשרות היחידה היא שהעיגול שווה ל-2, והמשולש שווה ל-0.

6. בשק 100 כדורים ב-4 צבעים: אדום, ירוק, כחול וצהוב. אם נוציא מהשק 50 כדורים כלשהם, בוודאות יהיה ביניהם לפחות כדור אחד כחול או צהוב. אם נוציא מהשק 70 כדורים כלשהם, בוודאות יהיו ביניהם לפחות שני כדורים אדומים. מהו המספר הגדול ביותר של כדורים ירוקים שיכולים להיות בשק?

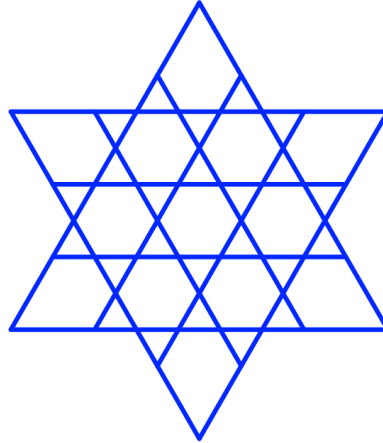
תשובה. 17

פתרון. יש לפחות 32 כדורים אדומים, אחרת היה אפשר להוציא 70 כדורים שאין בהם שני אדומים. יש לפחות 51 כדורים צהובים וכחולים, אחרת היה אפשר להוציא 50 כדורים שאין בהם כחול או צהוב. בעצם אלה טענות שקולות למה שנתון בשאלה. אם נסכם, נקבל שיש לפחות 83 כדורים בצבעים אדום, צהוב וכחול, כלומר כאלה שהם לא ירוק. לכן יש לכל היותר 17 כדורים ירוקים.

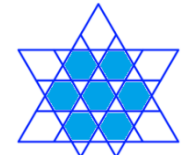


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

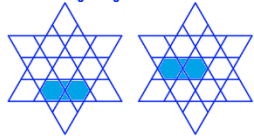
7. נגדיר "צורת מגן דויד" כצורה גיאומטרית המורכבת מ-2 משולשים שצלעותיהם נחתכים ב-6 נקודות. כמה צורות מגן דוד יש בתמונה הבאה:



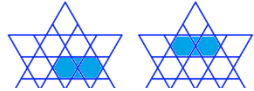
פתרון. מגן דוד הוא בעצם משושה שהמשיכו את הצלעות שלו. דרך אחרת לחשוב עליו זה לבחור 3 זוגות של ישרים מקבילים, בצורה מסוימת. בציור שלנו יש 3 כיוונים של ישרים, לכן צריך שני ישרים בכל כיוון. זה כולל גם שני ישרים אופקיים. אם נבחר שני ישרים אופקיים סמוכים, נגיד שיש לו **גובה 1**, אם מדובר על שני ישרים אופקיים לא סמוכים אבל לא הכי רחוקים, נגיד שיש לו **גובה 2**, ואם זה שני ישרים אופקיים הכי רחוקים, נגיד שזה **גובה 3**. בדומה, אם יש למגן דוד שני ישרים מקבילים הכי קרובים באיזשהו כיוון שהם הכי קרובים, נגיד שיש להם רוחב 1 באיזשהו כיוון וכדומה.



נתחיל ממגני דוד בגובה 1. אם זה גם רוחב 1 בכל כיוון, נקבל 7 אפשרויות למגן דוד.



אם יש גובה 1 אבל רוחב יותר גדול בכיוונים אחרים, זה נותן 4 אפשרויות לרוחב 2 ואפשרות יחידה ברוחב 3, סה"כ 5 אפשרויות. לכן אם יש גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון ורוחב או גובה שונה מ-1 בכיוון אחר, אז יש 15 אפשרויות לזה (הרי זה פי 3).

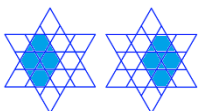


לכן אם יש גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון, יוצא $7+15=22$ אפשרויות.



נשאר לספור מקרים שגובה ורוחב בכל כיוון גדולים מ-1. אם גובה ורוחב בכל כיוון שווה ל-2, מקבלים שהמשושה נראה קצת כמו משולש; הוא יכול להיות כמו משולש שמכוון מטה ואז יש 3 אפשרויות והוא יכול להיות מכוון הפוך וזה עוד 3 אפשרויות, בסה"כ 6 אפשרויות.

נשארו המקרים שגובה או אורך באחד הכיוונים הוא 3.



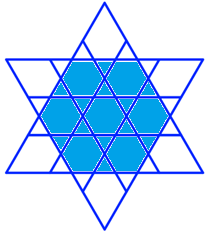
נניח שגובה 3 ורוחב בכל כיוון הוא 2. נקבל משושה שנראה כמו מעוין, וזה נותן 2 אפשרויות. עם סיבובים של מצבים כאלה נקבל בסה"כ 6 אפשרויות.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד שלב א, שנת תשפ"ב - פתרונות

אם הגובה והרוחב בכיוונים שונים הם 2, 3, ו-3 אז צריך לקחת את ש הישרים הכי קיצוניים בכל הכיוונים וישר אחד שהוא לא הכי קיצוני אבל קרוב להכי קיצוני. משושה שמקבלים במצב זה הוא דומה לטרפז, ועם סיבובים אפשר לקבל בדיוק 6 מצבים לזה.



נשאר המקרה שבו רוחב וגובה הוא 3 ואז פשוט לוקחים ישר קיצוני בכל כיוון.

נסכם: יש 22 מקרים שיש בהם גובה או רוחב 1 באיזשהו כיוון.

יש 6 מקרים שגובה ורוחב בכל כיוון הוא 2,

יש 6+6 מקרים שבהם המספרים של רוחב וגובה חלקם 2 וחלקם 3,

יש מקרה 1 שבו גובה ורוחב בכל כיוון הוא 3.

בסה"כ $22+6+6+6+1$ שזה שווה ל- $22+18+1$ שזה 41.