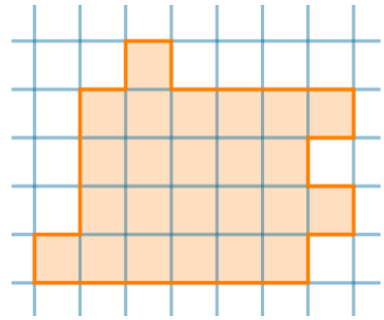
Всеизраильская олимпиада по математике для девятых классов

Финал, 5781 год

1. Разрежьте фигуру на 4 равные части:

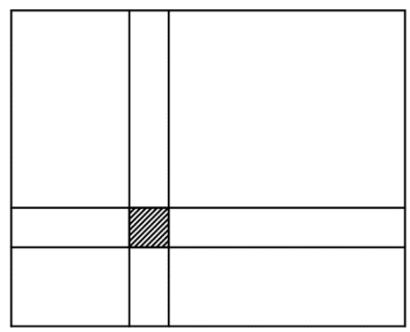
Примечание: равные геометрические фигуры – это фигуры, которые совмещаются наложением.



2. Докажите, что у этого уравнения бесконечно много решений в натуральных числах:

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = w^5$$

3. Из клетчатого прямоугольника 43×47 вырезали одну клеточку, которая не касается его сторон. Стороны клеточки продлили до пересечения со сторонами прямоугольника, в результате он разделился на 8 меньших прямоугольников (см. рисунок). Докажите, что из 8 получившихся прямоугольников нельзя построить никакой прямоугольник.



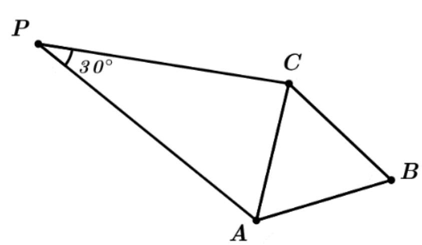
4. Подставьте в клеточки числа от 1 до 10, каждое по разу, так, чтобы выполнялись два условия:

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$$

- у каждой дроби числитель и знаменатель взаимно простые, то есть их наибольший общий делитель равен 1,

- сумма всех дробей – целое число.

5. 7. На стороне AC равностороннего треугольника ABC построили внешним образом треугольник APC, так что $\angle APC = 30°$ (см. рисунок). Докажите, что из отрезков AP, BP и CP можно составить прямоугольный треугольник.



Бланки олимпиады, решения и дополнительная информация будут размещены на сайте:

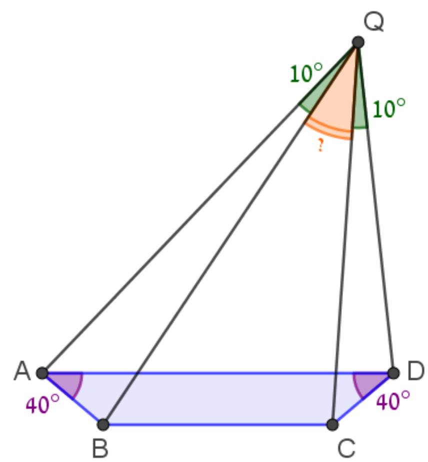
http://www.israelmath.com/olymp

Всеизраильская олимпиада по математике для девятых классов
Финал, 5781 год

6. В волшебной стране живут 4 племени: *положительные, отрицательные, рыцари и лжецы*. *Положительные* люди на любой вопрос отвечают «да», *отрицательные* – «нет», *рыцари* всегда говорят правду, а *лжецы* всегда лгут. Вы встретили 4 человек, среди которых есть представители всех 4 племён. Какое наименьшее количество вопросов «да»/«нет» надо задавать, чтобы определить, кто принадлежит какому племени?

7. Для любых $a, b > 0$ докажите $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + (a-1)(b-1) \geq 2$.

8. На рисунке изображена равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, углы при основании AD равны $40°$. Дана такая точка Q, что отрезки QB и QC имеют разную длину и пересекают AD. Кроме того, известно, что $\angle AQB = 10° = \angle CQD$. Найти $\angle BQC$.



Желаем успеха!