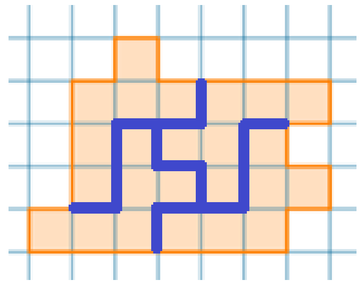
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט
פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

שאלה 1.

חתכו את הצורה ל-4 חלקים חופפים:

תשובה.



שאלה 2.

הוכיחו כי למשוואה הבאה יש אינסוף פתרונות במספרים שלמים חיוביים:

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = w^5$$

פתרון ראשון.

נשים לב כי $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 4^5$. זה נותן פתרון אחד. אינסוף פתרונות נוספים אפשר לקבל באופן הבא:

$$(4n^5)^4 + (4n^5)^4 + (4n^5)^4 + (4n^5)^4 = (4n^4)^5.$$

פתרון שני.

ניקח מספרים טבעיים כלשהם m, n, k, l (יש אינסוף אפשרויות לבחירתם).

נסמן $m^4 + n^4 + k^4 + l^4 = a$.

אזי $(2a)^4 + (3a)^4 + (4a)^4 + (5a)^4 = a^5$.

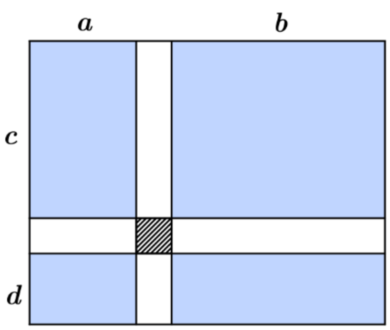
<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט</u>

פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

<u>שאלה 3.</u>

ממלבן משבצות בגודל 47×43 גוזרים משבצת אחת שלא נוגעת בצלעותיו *(החיתוך מתבצע לפי קווי הרשת)*. מאריכים את צלעות המשבצת עד לחיתוך עם צלעות המלבן, כתוצאה מכך, הוא מחולק ל-8 מלבנים קטנים יותר (ראו ציור). הוכיחו כי לא קיים מלבן שניתן לרצף על ידי 8 המלבנים הללו.

<u>פתרון.</u>



נתבונן ב-4 המלבנים הכחולים ונסמן את הצלעות שלהם a, b, c, d כמתואר בציור. $a + b = 46$, לכן לפחות אחד מהם גדול או שווה ל-23 (אם שניהם יהיו קטנים מ-23, הסכום יהיה פחות מ-46). באופן דומה, $c + d = 42$, לכן לפחות אחד מהם גדול או שווה ל-21. בגלל הנוסחאות לשטחים של המלבנים הכחולים מכילים את כל האפשרויות של צירופים של $\{a, b\}$ עם $\{c, d\}$, יהיה מלבן שהרוחב שלו לפחות 23 והגובה לפחות 21. כתוצאה מכך, שני המימדים של המלבן שאנחנו נרכיב יהיו גדולים מ-20.

מצד שני, נשים לב ששטח הכולל של 8 המלבנים הללו הוא $43 \times 47 - 1 = 2020$, לכן השטח של המלבן שאנחנו רוצים להרכיב צריך להיות 2020. נפרק לראשוניים: $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$. זה אומר שלמלבן הזה תהיה צלע אחת שאורכה לפחות 101, ולכן הצלע השנייה תהיה לכל היותר 20. זה נוגד למה שקיבלנו לפני זה, לכן מלבן כזה לא יכול להיות קיים.

<u>שאלה 4.</u>

הציבו במשבצות מספרים מ-1 עד 10, כל מספר פעם אחת, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים:

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

- בכל שבר, המונה והמכנה יהיו זרים זה לזה, כלומר המחלק המשותף המקסימלי שלהם יהיה 1;
- הסכום של כל השברים יהיה מספר שלם.

<u>תשובה.</u>

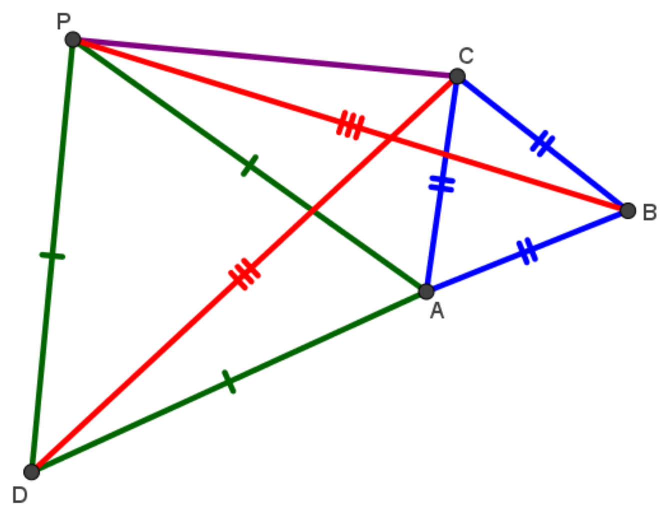
$$\frac{\boxed{2}}{\boxed{1}} + \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}} + \frac{\boxed{7}}{\boxed{6}} + \frac{\boxed{8}}{\boxed{5}} + \frac{\boxed{9}}{\boxed{10}} = 7$$

שאלה 5.

המשולש ABC שווה צלעות. בונים משולש APC כלפי חוץ, כך ש-$\angle APC = 30°$. הוכיחו כי מהקטעים AP, BP ו-CP ניתן לבנות משולש ישר זווית.

פתרון.

נצמיד למשולש BAP עוד משולש משוכלל DAP.



סיבוב ב- 60° מעביר את המשולש PAC למשולש DAB. לכן הקטע PB שווה ל-DC. לכן האורכים שמדברים עליהם של הקטעים AP, BP ו-CP הם בעצם צלעות המשולש PBD. הזווית P במשולש זה מורכבת מזווית $\sphericalangle APC = 30^\circ$ וזווית $\sphericalangle APD = 30^\circ$ אז היא 90°.

שאלה 6.

בארץ הקסומה חיים אנשים מ-4 סוגים: אנשים *חיוביים*, אנשים *שליליים*, *דוברי אמת* ו-*שקרנים*. אנשים חיוביים עונים "כן" על כל שאלה, אנשים שליליים עונים "לא" על כל שאלה, דוברי אמת תמיד עונים את האמת, ושקרנים תמיד משקרים. פגשת 4 תושבי הארץ הקסומה, שאחד מהם חיובי, אחד שלילי, אחד דובר אמת ואחד שקרן, וברצונך לגלות מי זה מי. לצורך זה מותר לשאול אותם שאלות מסוג כן\לא (כל פעם שואלים בן אדם אחד, ניתן לשאול אותו אדם גם מספר פעמים). מה המספר הקטן ביותר של שאלות שצריך לשאול לשם כך?

תשובה. 5.

פתרון.

יש $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ אפשרויות לקשר בין 4 אנשים ל-4 סוגים, לכן לא מספיק לשאול 4 שאלות של כן ולא, זה נותן רק $2^4=16$ אפשרויות, כי אז שתי אפשרויות יתאימו לאותה סדרה של תשובות, ולכן לא תמיד יהיה אפשר לנחש את הסוגים לפי התשובה.

אם נשאל בן אדם: "האם 2 פלוס 2 שווה 4?" שניים יגידו "כן" – דובר אמת ואיש חיובי ושניים יגידו "לא" – שקרן ושלילי. לכן מספיק לפנות את השאלה ל-3 אנשים ואז נדע גם את התשובה של הרביעי אפילו בלי לשאול אותו.

כך אחרי שנשאל 3 שאלות, נוכל לחלק את האנשים לשני סוגים: מצד אחד דובר אמת וחיובי, ומצד אחד שקרן ושלילי.

ניגש לאחד משני אנשים שעונים כן על השאלה הראשונה, ונשאל אותו האם הוא חיובי. אם הוא יגיד "לא", אז הוא דובר אמת, ואם הוא יגיד "כן" אז הוא חיובי. כך או כך, נדע מי דובר אמת ומי חיובי.

כעת ניגש לדובר אמת, נצביע על אחד מהאנשים שעונים "לא" לשאלה הראשונה, ונשאל את דובר האמת: "האם הוא שקרן?" זו תהיה השאלה החמישית. לפי התשובה שלו נדע מי שקרן ומי שלילי

שאלה 7.

לכל $a, b > 0$ הוכיחו את האי-שוויון: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+(a-1)(b-1)\geq 2$.

פתרון.

לאחר פתיחת סוגריים נקבל

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+ab-a-b+1\geq 2$$

נקזז, נעביר אגפים:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+ab\geq 1+a+b$$

נכפיל ב-2 ונקבל אי-שוויון שקול:

$$2\frac{a}{b}+2\frac{b}{a}+2ab\geq 2+2a+2b$$

אי-שוויון זה מתקבל מסכום של 3 אי-שויונים:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \qquad \frac{a}{b}+ab\geq 2a \qquad \frac{b}{a}+ab\geq 2b$$

נוכיח את שלושתם ומזה יתקבל אי-השוויון שלנו.

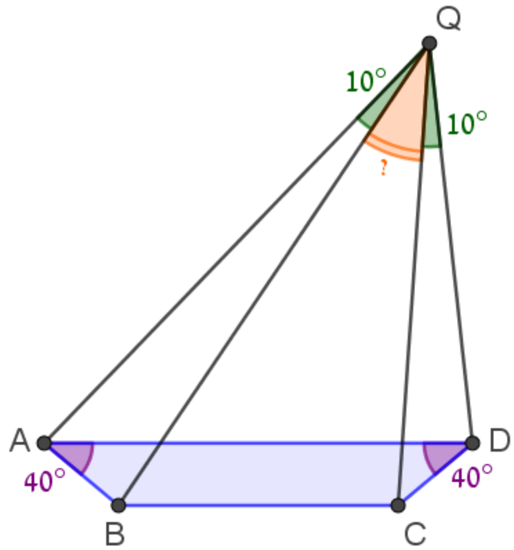
כדי להוכיח את $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, נכפיל במכנה, נעביר דברים לאגף שמאל ונקבל $a^2-2ab+b^2\geq 0$ שזה שקול לאי שוויון $(a-b)^2\geq 0$ שזה ברור.

כדי להוכיח את $\frac{a}{b}+ab\geq 2a$ נקזז את a, נכפיל במכנה ונעביר הכול לצד שמאל, ואז נקבל $1-2b+b^2\geq 0$ שזה כמו להגיד $(1-b)^2\geq 0$.

המחובר $\frac{b}{a}+ab\geq 2b$ מוכח באופן דומה לחלוטין.

שאלה 8.

בציור טרפז שווה שוקיים $ABCD$ עם בסיסים AD ו-BC, והזוויות ליד הבסיס AD הן $40°$. נתונה נקודה Q כך שהקטעים QB ו-QC שונים באורכם וחותכים את AD. נתון בנוסף כי $\angle AQB = \angle CQD = 10°$. מצאו את $\angle BQC$.



פתרון.

נשקף את הנקודה Q ביחס לאנך האמצעי של BC, ונקבל נקודה P, כזאת ש- $\sphericalangle CQD = 10^\circ = \sphericalangle CPD$. מכאן הנקודות P, Q, C ו-D על מעגל אחד. מרכז המעגל נמצא על האנך האמצעי של PQ, שהוא גם האנך האמצעי של BC וגם האנך האמצעי של AD, לכן כל קודקודי הטרפז נמצאות במרחק שווה ממרכז המעגל, כלומר A, B, C, D, P ו-Q נמצאים כולם על מעגל אחד. לכן $\sphericalangle AQC = \sphericalangle ADC = 40^\circ$. ולכן $\sphericalangle BQC = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$.