

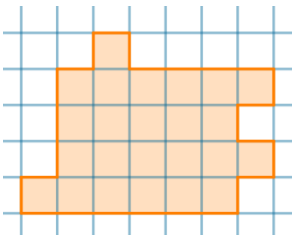


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט

שלב הגמר, שנת תשפ"א

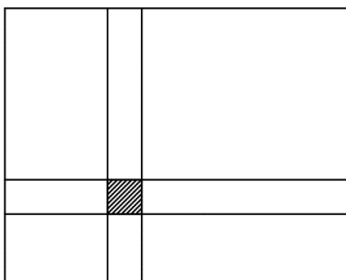
יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה (איפה שזה רלוונטי)

1. חתכו את הצורה ל-4 חלקים חופפים:



2. הוכיחו כי למשוואה הבאה יש אינסוף פתרונות במספרים שלמים חיוביים:

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = w^5$$

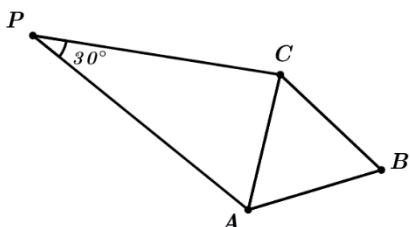


3. ממלבן משבצות בגודל 43×47 גוזרים משבצת אחת שלא נוגעת בצלעותיו (החיתוך מתבצע לפי קווי הרשת). מאריכים את צלעות המשבצת עד לחיתוך עם צלעות המלבן, כתוצאה מכך, הוא מחולק ל-8 מלבנים קטנים יותר (ראו ציור). הוכיחו כי לא קיים מלבן שניתן לרצף על ידי 8 המלבנים הללו.

4. הציבו במשבצות מספרים מ-1 עד 10, כל מספר פעם אחת, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים:

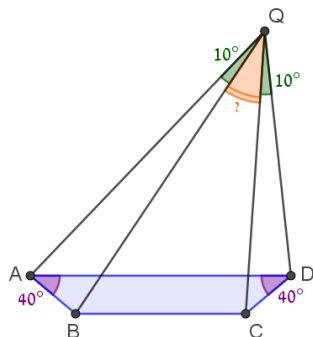
$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$$

- בכל שבר, המונה והמכנה יהיו זרים זה לזה, כלומר המחלק המשותף המקסימלי שלהם יהיה 1;
- הסכום של כל השברים יהיה מספר שלם.



5. המשולש ABC שווה צלעות. בונים משולש APC כלפי חוץ, כך ש- $\angle APC = 30^\circ$. הוכיחו כי מהקטעים AP, BP ו-CP ניתן לבנות משולש ישר זווית.

6. בארץ הקסומה חיים אנשים מ-4 סוגים: אנשים שליליים, אנשים שליליים, דוברי אמת ו-שקרנים. אנשים חיוביים עונים "כן" על כל שאלה, אנשים שליליים עונים "לא" על כל שאלה, דוברי אמת תמיד עונים את האמת, ושקרנים תמיד משקרנים. פגשת 4 תושבי הארץ הקסומה, שאחד מהם חיובי, אחד שלילי, אחד דובר אמת ואחד שקרן, וברצונך לגלות מי זה מי. לצורך זה מותר לשאול אותם שאלות מסוג כן/לא (כל פעם שואלים בן אדם אחד, ניתן לשאול אותו אדם גם מספר שאלות). מה המספר הקטן ביותר של שאלות שצריך לשאול לשם כך?



7. לכל $a, b > 0$ הוכיחו את האי-שוויון: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + (a-1)(b-1) \geq 2$.

8. בציור טרפז שווה שוקיים ABCD עם בסיסים AD ו-BC, והזוויות ליד הבסיס AD הן 40° . נתונה נקודה Q כך שהקטעים QB ו-QC שונים באורכם וחותכים את AD. נתון בנוסף כי $\angle AQB = 10^\circ = \angle CQD$. מצאו את $\angle BQC$.

בהצלחה!