<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח</u>

פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

<u>שאלה 1.</u>

מרים חישבה ריבועים של שני מספרים טבעיים עוקבים, חיברה אותם והכפילה את התוצאה ב-2. הוכיחו כי המספר שהיא קיבלה הינו 1 ועוד ריבוע של מספר שלם.

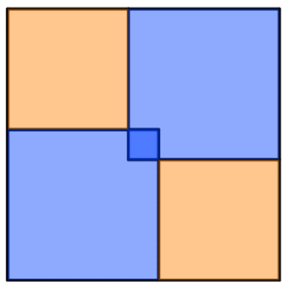
<u>פתרון ראשון.</u>

נסמן את המספרים שמרים לקחה n ו-$n+1$. אזי

$$2(n^2+(n+1)^2)=2(n^2+n^2+2n+1)=4n^2+4n+2=(4n^2+4n+1)+1=(2n+1)^2+1$$

<u>פתרון שני.</u>

ראו ציור. בציור שני ריבועים עם צלע של n משבצות (הכחולים) ושני ריבועים עם צלע של $n+1$ משבצות (הכתומים). ניתן להרכיב מהם ריבוע עם צלע $2n+1$, כך שלשני הריבועים הכחולים יש משבצת משותפת אחת, ולאף שני ריבועים אחרים אין משבצות משותפות.

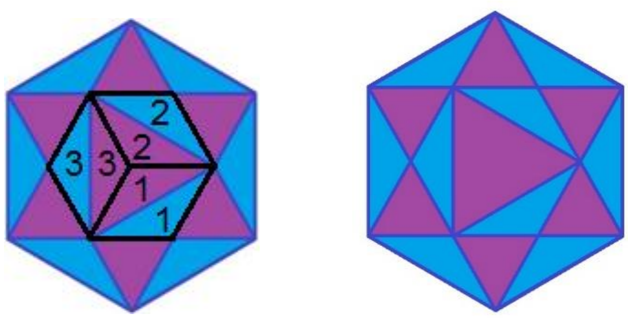


<u>שאלה 2.</u>

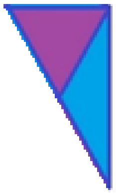
המשושה בציור משוכלל. איזה שטח גדול יותר, הכחול או הסגול?

<u>תשובה.</u> הם שווים.

<u>פתרון.</u>



המשושה מורכב מ-6 משולשים כחולים קטנים בצדדים, 6 משולשים סגולים קטנים לידם, ומשושה פנימי (מוקף בשחור בציור). את המשושה הפנימי נחלק ל-3 מעוינים כאשר נחבר את מרכז המשושה לקודקודי המשולש הסגול המרכזי. בעת המשושה מחולק ל-3 חלקים חופפים, בכל חלק חצי סגול וחצי כחול, כי אלכסון של מעוין מחלק אותו לשני חלקים חופפים.



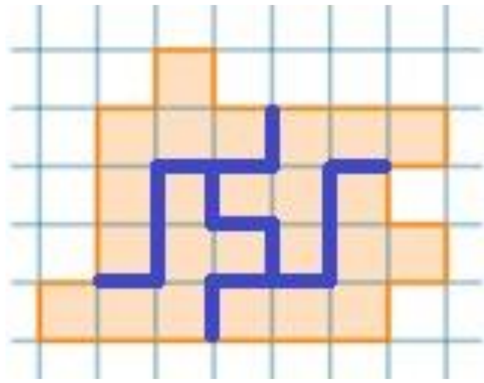
מחוץ למשושה המרכזי, יש 6 משולשים כחולים קטנים ו-6 משולשים סגולים משוכללים קטנים. אבל כל משולש כחול שווה שטח למשולש סגול שסמוך אליו, כי תיכון מחלק משולש לשני חלקים שווי שטח. לכן גם מחוץ למשושה הקטן במרכז השטח הכחול שווה לשטח הסגול.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח</u>
פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

<u>שאלה 3.</u>

חתכו את הצורה ל-4 חלקים חופפים.

<u>תשובה.</u>



<u>שאלה 4.</u>

בתרגיל כפל הבא אותיות שונות מחליפות ספרות שונות, ואותיות זהות מחליפות ספרות זהות. שחזרו את התרגיל.

<u>תשובה.</u>

	×	2	4	2	
			2	4	
+		9	6	8	
	4	8	4		
	5	8	0	8	

<u>פתרון.</u>

	×	א	ב	א	
			א	ב	
+		נ	ג	ל	
	ב	ל	ב		
	מ	ל	ש	ל	

נתבונן בתוצאות הביניים: **לגנ** ו-**בלב**. שניהם שונים מ-**אבא** ושונים מ-0, לכן שתי הספרות **א** ו-**ב** שונות מ-0 ושונות מ-1.

בגלל שאנחנו מכפילים מספר תלת ספרתי **אבא** במספר דו ספרתי **בא** ומקבלים מספר ארבע ספרתי, זה אומר ש-$\text{א} \geq 3$. נשים לב גם שאם $\text{א} = 3$ אז $\text{ב} = 9$, אבל אז, בגלל ש-$\text{ב} \neq \text{מ}$, צריכה להיות עוד ספרה לפני **מ**, ואין. לכן $\text{א} \neq 3$ ואז האפשרות היחידה שנשארת היא $\text{א} = 2$.

	×	2	ב	2	
			2	ב	
+		נ	ג	ל	
	ב	ל	ב		
	מ	ל	ש	ל	

כשאנחנו כופלים את המספר **2ב2** ב-2, אנחנו מקבלים מספר תלת ספרתי שמסתיים בספרה **ב**. לכן $\text{ב} = 4$.
זה נותן לנו את שני הגורמים של המכפלה ומגיר את התרגיל באופן חד משמעי.

שאלה 5.

האם קיימים שלושה מספרים ממשיים שונים בזוגות a, b, c, כך ששלושת הישרים

$$y = ax + a^2, \quad y = bx + b^2, \quad y = cx + c^2$$

יעברו דרך נקודה אחת?

תשובה. לא.

פתרון ראשון.

נניח בשלילה שנקודה כזאת קיימת והקואורדינטות שלה (x_0, y_0). אזי

$$y_0 = ax_0 + a^2 = bx_0 + b^2 = cx_0 + c^2$$

$$ax_0 + a^2 = bx_0 + b^2 \implies (a-b)x_0 = b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) \implies x_0 = -(a+b) \quad (1)$$

$$bx_0 + b^2 = cx_0 + c^2 \implies x_0 = -(b+c) \quad (2)$$

$$cx_0 + c^2 = ax_0 + a^2 \implies x_0 = -(c+a) \quad (3)$$

רואים כי $y_0 = a + b = b + c = c + a$. זה אפשרי רק כאשר $a = b = c$, בניגוד לנתוני השאלה.

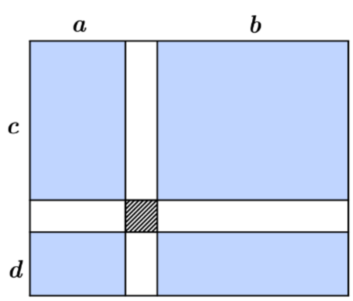
פתרון שני.

אילו היו שלושה ישרים שנפגשים בנקודה (x, y), אז למשוואה $y = tx + t^2$ במשוואה ב-t היו שלושה פתרונות שונים לפחות: a, b ו-c, אבל זו משוואה ריבועית ולכן יש לה שני פתרונות לכל היותר.

שאלה 6.

ממלבן משבצות בגודל 47×43 גוזרים משבצת אחת שלא נוגעת בצלעותיו *(החיתוך מתבצע לפי קווי הרשת)*. מאריכים את צלעות המשבצת עד לחיתוך עם צלעות המלבן, כתוצאה מכך, השטח הנותר מחולק ל-8 מלבנים קטנים יותר. הוכיחו כי לא קיים מלבן שניתן לרצף על ידי 8 המלבנים הללו.

פתרון.



נתבונן ב-4 המלבנים הכחולים ונסמן את הצלעות שלהם a, b, c, d כמתואר בציור. $a + b = 46$, לכן לפחות אחד מהם גדול או שווה ל-23 (אם שניהם יהיו קטנים מ-23, הסכום יהיה פחות מ-46) . באופן דומה, $c + d = 42$, לכן לפחות אחד מהם גדול או שווה ל-21. בגלל הנוסחאות לשטחים של המלבנים הכחולים מכילים את כל האפשרויות של צירופים של $\{a, b\}$ עם $\{c, d\}$, יהיה מלבן שהרוחב שלו לפחות 23 והגובה לפחות 21. כתוצאה מכך, שני המימדים של המלבן שאנחנו נרכיב יהיו גדולים מ-20.

מצד שני, נשים לב ששטח הכולל של 8 המלבנים הללו הוא $43 \times 47 - 1 = 2020$, לכן השטח של המלבן שאנחנו רוצים להרכיב צריך להיות 2020. נפרק לראשוניים: $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$. זה אומר שלמלבן הזה תהיה צלע אחת שאורכה לפחות 101, ולכן הצלע השנייה תהיה לכל היותר 20. זה נוגד למה שקיבלנו לפני זה, לכן מלבן כזה לא יכול להיות קיים.

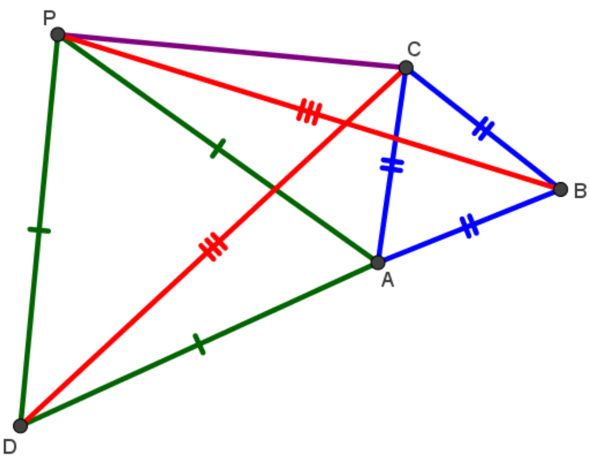
שאלה 7.

המשולש ABC שווה צלעות. בונים משולש APC כלפי חוץ, כך ש-$\angle APC = 30°$. הוכיחו כי מהקטעים AP, BP ו-CP ניתן לבנות משולש ישר זווית.

פתרון.

נצמיד למשולש BAP עוד משולש משוכלל DAP.

.



סיבוב ב-$60°$ מעביר את המשולש PAC למשולש DAB. לכן הקטע PB שווה ל-DC. לכן האורכים שמדברים עליהם של הקטעים AP, BP ו-CP הם בעצם צלעות המשולש PDB. הזווית P במשולש זה מורכבת מזווית $\angle APC = 30°$ והזווית $\angle APD = 30°$, אז היא שווה ל-$90°$.