



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-10 פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

שאלה 1.

ביער 3 סוגים של ציפורים: דרורים, יונים וינשופים. חצי מהציפורים הם דרורים, שליש מהציפורים הם יונים. אם כל ינשוף יאכל מספר דרורים במספר הינשופים הכולל, לא יישארו דרורים כלל. כמה יונים יש ביער? נמקו את תשובתכם.

תשובה. 6 יונים.

פתרון.

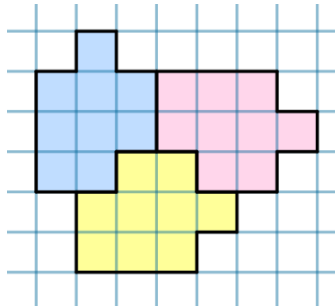
אם כל ינשוף יאכל מספר דרורים כמספר הינשופים הכולל, הם יאכלו יחד את כל הדרורים. לכן, אם נסכום את כמויות הדרורים שכל ינשוף יאכל, נקבל שמספר הדרורים שווה למספר הינשופים כפול עצמו.

מצד שני, הינשופים מהווים $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ מכל הציפורים ביער. אז מספר הדרורים, שזה $\frac{1}{2}$ מכל הציפורים ביער, שווה למספר הינשופים כפול 3.

מכאן, מספר הינשופים שווה ל-3. אזי מספר היונים, שהוא פי 2 גדול יותר ממספר הינשופים, שווה ל-6.

שאלה 2.

חתכו את הצורה ל-3 חלקים חופפים.



פתרון.

שאלה 3.

על הלוח רשום מספר דו ספרתי ומספר תלת ספרתי. כאשר בני חילק את המספר התלת ספרתי במספר הדו ספרתי, הוא קיבל מספר חד ספרתי. וכאשר הוא חיבר את המספר התלת ספרתי והמספר הדו ספרתי, הוא קיבל מספר ארבע ספרתי. הוכיחו כי בני בוודאות טעה בחישוב.

פתרון.

המספר התלת ספרתי שווה למספר חד ספרתי כלשהו כפול המספר הדו ספרתי, לכן, המספר התלת ספרתי הוא לכל היותר 9 פעמים המספר הדו ספרתי. לכן, הסכום של המספר התלת ספרתי והמספר הדו ספרתי הוא לכל היותר 10 פעמים המספר הדו ספרתי. ושום מספר דו ספרתי כפול 10 לא יכול לתת תוצאה 4-ספרתית.

$$\begin{aligned} \square\square\square &= \square \times \square\square \\ \Downarrow \\ \square\square\square &\leq 9 \times \square\square \\ \Downarrow \\ \underbrace{\square\square\square}_{\leq 9 \times \square\square} + \square\square &\leq 10 \times \square\square \end{aligned}$$



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

שאלה 4.

הדרקון הניח בפני בילבו שלוש ערמות יהלומים: של 17, 21 ו-27 יחידות. כל היהלומים זהים למראה, אך אחד מהם מזויף, ומשקלו שונה מהמשקל של יהלום אמיתי. על בילבו לבחור ערימה שלא מכילה יהלום מזויף תוך שקילה אחת במאזני כף. כיצד בילבו יוכל לעשות את זה?
הערה: תוך שקילה אחת, ניתן להניח על הכפות של המאזניים שני משקלים ולראות האם הם שווים או האם אחד מהם כבד יותר.

פתרון.

בילבו יניח על כף אחת את הערימה של 17 יהלומים, ועל הכף השנייה – 17 יהלומים מתוך הערימה של 21. אם המאזניים יהיו בשיווי משקל, זה אומר שכל היהלומים שנמצאים עכשיו על המאזניים – אמיתיים, לכן, בפרט, כל היהלומים בערימה של 17 אמיתיים. אם המאזניים לא יהיו בשיווי משקל, הסימן שהיהלום המזויף נמצא על המאזניים. אבל אז הערימה של 27 מורכבת רק מיהלומים אמיתיים.

שאלה 5.

בציור מסגרת המורכבת מ-8 משבצות. הציבו בתוך המשבצות מספרים מ-1 עד 8, ללא חזרות, כך שסכום בכל שורה\עמודה של 3 משבצות יחלק את הסכום בכל המשבצות האחרות.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 5 | 1 |
| 4 | | 8 |
| 2 | 7 | 3 |

פתרון אפשרי.

הערה. קיימות גם אפשרויות אחרות.

דרך הפתרון.

אנחנו נחפש סידורי מספרים בעלי תכונה מיוחדת: בנוסף לנדרש בשאלה, כל 4 הסכומים בשורות\עמודות של 3 משבצות יהיו שווים זה לזה. חשב לציין שקיימים גם פתרונות שהם לא מהסוג הזה.
בגלל שסכום בכל שורה\עמודה של משבצות מחלק את הסכום בכל המשבצות האחרות, הוא חייב לחלק את הסכום הכולל של המספרים בתוך המסגרת (הבינו מדוע). לכן, הסכום בכל שורה\עמודה כזאת צריך להיות מחלק של 36. המספר 4 = 36 : 9 קטן מידי, כי במקרה זה לא נוכל לשלב את 8, והמספר 2 = 36 : 18 גדול מידי, כי במקרה זה לא נוכל לשלב את 1. לכן הסכום בכל שורה\עמודה כזאת חייב להיות 3 = 36 : 12.
סכום כל המספרים בתוך המסגרת שווה לארבע פעמים סכום בשורה אחת פחות סכום המספרים בפינות (הבינו מדוע). לכן, סכום המספרים בפינות שווה $12 = 36 - 4 \times 12$.
אפשר לשים לב ש-8 לא יכול לעמוד בפינה, כי יש רק דרך אחת להשלים אותו ל-12: $1 + 3 + 8$. לכן, 8 עומד במשבצת אמצעים של צלע כלשהי, ומסביבו יש את המספרים 1 ו-3. מכאן, ניתן להשלים את בניית הדוגמה בקלות (למשל, בשיטת ניסוי וטעיה).
הערה. שאלות מהסוג לא דורשות נימוק. כאן הדוגמה לבד מהווה פתרון מלא לשאלה ומזכה במלואה הניקוד. הדרך לפתרון ניתנה רק כדי להראות כיצד אפשר לבנות דוגמה כזאת.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

שאלה 6.

איזה שטח גדול יותר: הכתום או הירוק? נמקו את תשובתכם.

תשובה. הירוק.

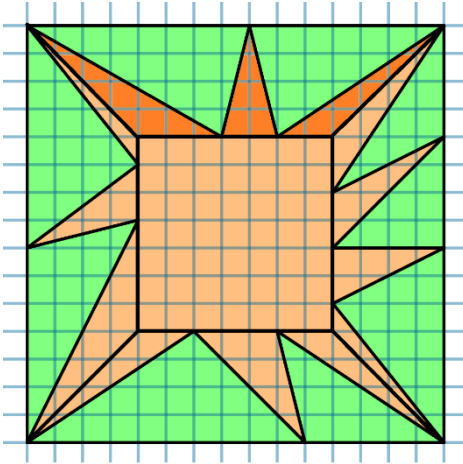
הערה: בשאלות מהסוג התשובה ללא נימוק לא מזכה בניקוד כלל.

פתרון.

השטח הכתום מורכב מהחלקים הבאים: ריבוע 7×7 במרכז, ועוד ארבע קבוצות של משולשים. בכל קבוצה של משולשים, הגובה של כל המשולשים הוא 4, וסכום אורכי הבסיסים הוא 7. לכן, השטח

$$\text{הכתום שווה ל-} 7 \times 7 + 4 \times \frac{7 \times 4}{2} = 49 + 56 = 105$$

השטח הירוק והשטח הכתום מרכיבים יחד ריבוע 15×15 , לכן השטח הירוק שווה ל- $15 \times 15 - 105 = 225 - 105 = 120$.



שאלה 7.

הוסיפו בין המספרים החד ספרתיים סימנים של פעולות חשבון וסוגריים, כך שיתקבל שוויון נכון:

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 2021$$

הערה: חייבים לשים פעולת חשבון בין כל ספרה לספרה. הפעולות המותרות הן (+, -, ×, :)

פתרונות אפשריים.

$$(1 \times 2 + (3 + 4) \times 5 + 6) \times (7 \times 8 - 9) = 2021$$

$$1 \times 2 + 3 - 4 \times (5 - 6) \times 7 \times 8 \times 9 = 2021$$

הערה. קיימות גם אפשרויות אחרות.