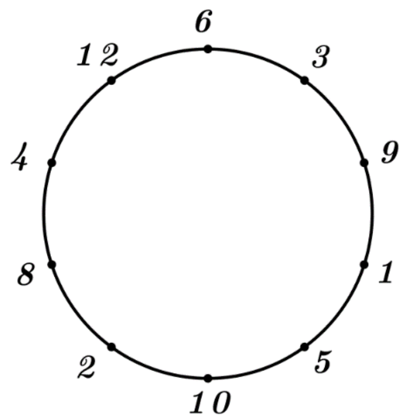
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד
פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

שאלה 1.

סדרו במעגל את המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, כך שבכל זוג של מספרים סמוכים, אחד מהם יתחלק בשני.

תשובה.



דרך הפתרון.

המספרים היחידים שיכולים להיות שכנים של 9 הם 3 ו-1, לכן אנחנו חייבים לשרשר אותם כך: 1 – 9 – 3 (או בסדר ההפוך). המספרים היחידים שיכולים להיות שכנים של 5 הם 1 ו-10, לכן אנחנו חייבים לשרשר את 5 אחרי ה-1, ואז את 10: 10 – 5 – 1 – 9 – 3. המספרים היחידים שיכולים להיות שכנים של 10 הם 1, 2 ו-5, אבל ב-1 כבר השתמשנו, לכם המספר היחיד שאפשר לשרשר אחרי 10 הוא 2. המספרים היחידים שיכולים להיות שכנים של 6 הם 3 ו-12, לכן המספר שבא לפני 3 חייב להיות 6, ולפני זה – 12. זה משאיר לנו רק שני מספרים לא משולבים, 2 ו-8, ויש רק דרך אחת לשלב אותם (ראות ציור).

הערה. שאלות מהסוג לא דורשות נימוק. כאן הדוגמה לבד מהווה פתרון מלא לשאלה ומזכה במלואה הניקוד. הדרך לפתרון ניתנה רק כדי להראות כיצד אפשר לבנות דוגמה כזאת.

שאלה 2.

ביער מספר עצים קסומים. על כל עץ קסום מספר ענפים כמספר העצים הקסומים ביער, ועל כל ענף מספר עלים כמספר הענפים על העץ. סך כל העצים הקסומים, הענפים והעלים שלהם יחד שווה ל-155. כמה עצים קסומים יש ביער? נמקו את תשובתכם.

תשובה. 5 עצים קסומים.

פתרון.

נסמן את מספר העצים הקסומים ב-🌲. אזי מספר הענפים על כל העצים הקסומים יחד שווה ל-🌲 × 🌲, ואז מספר כל העלים על כל העצים הקסומים יחד שווה ל-🌲 × 🌲 × 🌲 . מכאן,

$$\text{🌲} + \text{🌲} \times \text{🌲} + \text{🌲} \times \text{🌲} \times \text{🌲} = 155$$

בודקים ורואים שהאפשרות היחידה היא 5 = 🌲 (למספרים קטנים יותר התוצאה תהיה קטנה מידי, למספרים גדולים יותר התוצאה תהיה גדולה מידי).

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד
פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

שאלה 3.

בציור מסגרת המורכבת מ-8 משבצות. הציבו בתוך המשבצות מספרים מ-1 עד 8, ללא חזרות, כך שכל ארבעה הסכומים בשורות\עמודות של 3 משבצות יהיו שווים.

תשובה אפשרית.

הערה. קיימות גם אפשרויות אחרות.

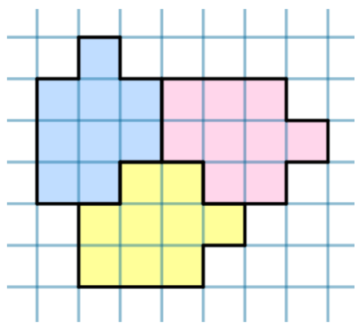
5	1	8
6		2
3	7	4

רעיון לפתרון. סכום כל המספרים בתוך המסגרת שווה ל-$1+2+\cdots+8=36$. מצד שני, סכום כל המספרים בתוך המסגרת שווה לארבע פעמים סכום בשורה אחת פחות סכום המספרים בפינות (הבינו מדוע). לכן, סכום המספרים בפינות חייב להתחלק ב-4, והאפשרויות לסכום זה הן 12, 16, 20, 24. ממשיכים מכאן בשיטת ניסוי וטעיה ובונים דוגמה שעובדת.

שאלה 4.

חתכו את הצורה ל-3 חלקים חופפים.

תשובה.

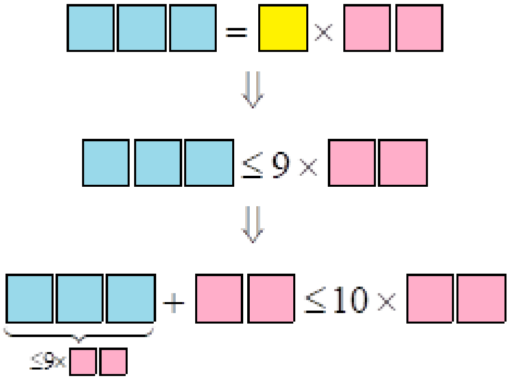


שאלה 5.

על הלוח רשום מספר דו ספרתי ומספר תלת ספרתי. כאשר בני חילק את המספר התלת ספרתי במספר הדו ספרתי, הוא קיבל מספר חד ספרתי. וכאשר הוא חיבר את המספר התלת ספרתי והמספר הדו ספרתי, הוא קיבל מספר ארבע ספרתי. הוכיחו כי בני בוודאות טעה בחישוב.

פתרון.

המספר התלת ספרתי שווה למספר חד ספרתי כלשהו כפול המספר הדו ספרתי, לכן, המספר התלת ספרתי הוא לכל היותר 9 פעמים המספר הדו ספרתי. לכן, הסכום של המספר התלת ספרתי והמספר הדו ספרתי הוא לכל היותר 10 פעמים המספר הדו ספרתי. ושום מספר דו ספרתי כפול 10 לא יכול לתת תוצאה 4-ספרתית.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

פתרונות – שלב הגמר, שנת תשפ"א

שאלה 6.

הדרקון הניח בפני בילבו שלוש ערמות יהלומים: של 17, 21 ו-27 יחידות. כל היהלומים זהים למראה, אך אחד מהם מזויף, ומשקלו שונה מהמשקל של יהלום אמיתי. על בילבו לבחור ערימה שלא מכילה יהלום מזויף תוך שקילה אחת במאזני כף. כיצד בילבו יוכל לעשות את זה?

הערה: למאזניים יש זוג כפות; ניתן להניח על שתי הכפות כמויות כלשהן של יהלומים ולראות האם המשקלים שווים או המשקל של היהלומים המונחים על אחת הכפות גדול יותר.

פתרון.

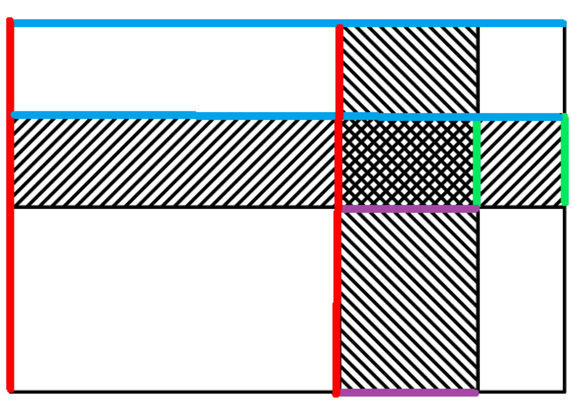
בילבו יניח על כף אחת את הערימה של 17 יהלומים, ועל הכף השנייה – 17 יהלומים מתוך הערימה של 21. אם המאזניים יהיו בשיווי משקל, זה אומר שכל היהלומים שנמצאים עכשיו על המאזניים – אמיתיים, לכן, בפרט, כל היהלומים בערימה של 17 אמיתיים. אם המאזניים לא יהיו בשיווי משקל, הסימן שהיהלום המזויף נמצא על המאזניים. אבל אז הערימה של 27 מורכבת רק מיהלומים אמיתיים.

שאלה 7.

באולם בצורת מלבן ששטחו 240 מטרים ריבועיים פרסו שני שטיחים שווי שטח. לכל אחד מהשטיחים יש צורה של מלבן שמתפרס מקיר אחד של האולם עד לקיר הנגדי. השטיחים מצטלבים כמו שמתואר בציור, השטח שמכוסה על ידי שניהם שווה ל-15 מטרים ריבועיים. מה השטח של שטיח אחד? נמקו!

תשובה. 60 מטרים ריבועיים.

פתרון.



240 = השטח של האולם = אדום × כחול

15 = השטח של החיתוך = ירוק × סגול

השטח של השטיח "האופקי" = ירוק × כחול

השטח של השטיח "האנכי" = אדום × סגול

מכאן רואים, שמכפלת השטחים של השטיחים שווה למכפלה של שטח האולם ושטח החיתוך:

אדום × ירוק × סגול × כחול

וזה שווה ל-$3600 = 240 \times 15$.

בגלל ששטחים של שני השטיחים שווים, שטח של כל שטיח צריך להיות מספר כזה, שאם נכפיל אותו בעצמו, נקבל 3600. המספר הזה הוא 60: $60 \times 60 = 3600$.