האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח

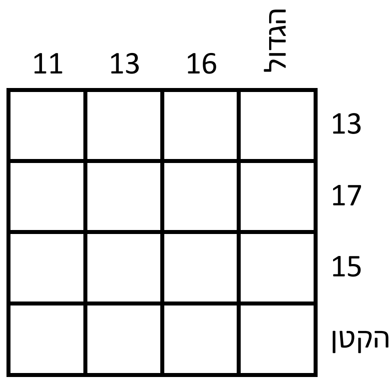
שלב ב, שנת תשפ"א

שאלה 1.

בציור טבלת מספרים בגודל 4×4.

סכומי המספרים בכל השורות של הטבלה שלמים ושונים. סכום של כל שורה רשום לידה, חוץ מהשורה עם הסכום הקטן ביותר (השורה התחתונה).

סכומי המספרים בכל העמודות של הטבלה שלמים ושונים. סכום של כל עמודה רשום לידה, חוץ מהעמודה עם הסכום הגדול ביותר (העמודה הימנית) .



מהו סכום המספרים בשורה התחתונה?

תשובה. 12

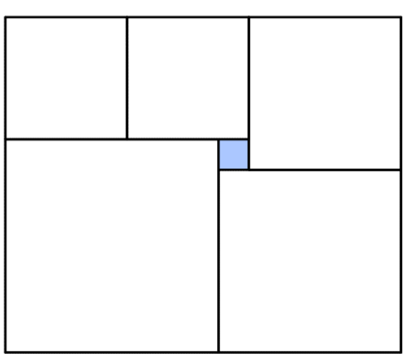
פתרון.

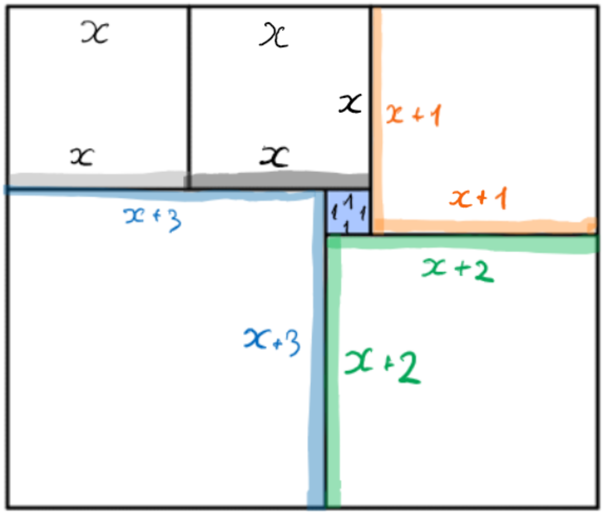
הסכום בשורה התחתונה קטן מ13, לכן הוא שווה ל12 או פחות. לכן סכום כל המספרים בטבלה שווה ל- $13 + 17 + 15 + 12 = 47$ או פחות. (הסכום שווה ל- 47 רק אם הסכום בשורה התחתונה הוא 12) הסכום בעמודה הימנית הוא לפחות 17, לכן סכום כל המספרים בטבלה הוא לפחות $11 + 13 + 16 + 17 = 47$. כלומר סכום של כל המספרים הוא לפחות 47 (בגלל העמודות), ומצד שני הוא לכל היותר 47 (בגלל השורות). לכן הוא חייב להיות 47, וסכום בשורה התחתונה חייב להיות 12.

שאלה 2.

בציור מלבן שמחולק ל-6 ריבועים. שטח של הריבוע הכחול – 1 סמ"ר.
מהו שטח של המלבן?

תשובה. 143





פתרון.

נסמן את אורך הצלע של הריבועים הקטנים ב-x. נקבל את אורכי שאר הריבועים:

ונקבל משוואה: $x + 3 + 1 = 2x$
ולכן $x = 4$.

מכאן צלעות של המלבן הגדול הן $x + x + x + 1 = 13$

$x + 1 + x + 2 = 11$

ולכן השטח הוא $11 \cdot 13 = 143$.

שאלה 3.

חשבו את ערך הביטוי:

$$\frac{1}{\frac{1}{100\cdot 102}+\frac{1}{102\cdot 104}+\frac{1}{104\cdot 106}+\cdots+\frac{1}{198\cdot 200}}$$

תשובה. 400

פתרון.

$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$, ולכן:

$$\frac{2}{100\cdot102}+\frac{2}{102\cdot104}+\frac{2}{104\cdot106}+\cdots+\frac{2}{198\cdot200}=\frac{1}{100}-\frac{1}{102}+\frac{1}{102}-\frac{1}{104}+\frac{1}{104}-\frac{1}{106}+\cdots+\frac{1}{198}-\frac{1}{200}$$

אחרי הצמצום נשאר $\frac{1}{100} - \frac{1}{200} = \frac{1}{200}$

אם נהפוך את המונים מ-2 ל-1 נקבל: $\frac{1}{100\cdot102}+\frac{1}{102\cdot104}+\frac{1}{104\cdot106}+\cdots+\frac{1}{198\cdot200}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{200}=\frac{1}{400}$

ולכן

$$\frac{1}{\frac{1}{100\cdot 102}+\frac{1}{102\cdot 104}+\frac{1}{104\cdot 106}+\cdots+\frac{1}{198\cdot 200}}=400$$

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח</u>
שלב ב, שנת תשפ"א

<u>שאלה 4.</u>

לכל מספר טבעי N נגדיר $S(N)$ להיות סכום כל המחלקים של N, ונגדיר $S^*(N) = S(N) - N - 1$.

מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר k עבורו יש יותר מערך אחד של N כך ש-$S^*(N) = k$.

<u>תשובה.</u> $k = 5$.

<u>פתרון.</u>

ראשית נשים לב כי $S^*(6) = S(6) - 6 - 1 = 6 + 3 + 2 + 1 - 6 - 1 = 5$

וגם $S^*(25) = S(25) - 25 - 1 = 25 + 5 + 1 - 25 - 1 = 5$ ולכן $k = 5$ עובד.

נשים לב כי $S^*(N)$ הוא סכום המחלקים של N השונים מ-1 ומ-N.

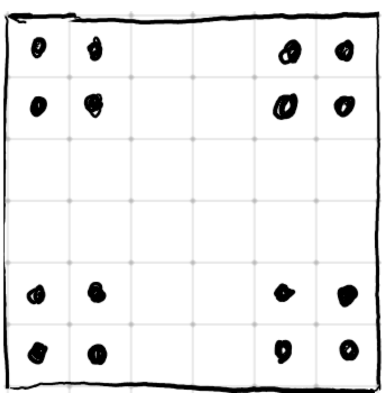
אם למשוואה $S^*(N) = k$ יש יותר מפתרון אחד אז לכל הפחות צריך להתקיים שניתן לרשום את k כסכום של מספרים שלמים גדולים מ-1 ושונים זה מזה, בשתי דרכים שונות.

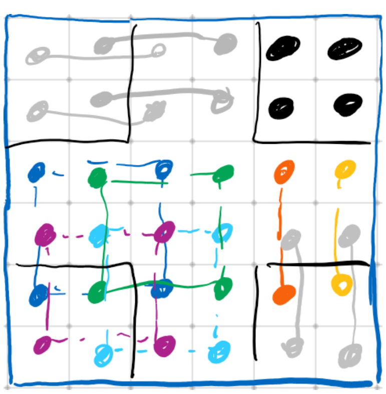
קל לראות שלא ניתן לרשום את המספרים 1,2,3,4 כסכום של מספרים שלמים שונים הגדולים מ-1 בשום דרך חוץ מהדרך הטריוויאלית $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4$ ולכן ה-k המינימלי שיכול לעבוד הוא 5.

<u>שאלה 5.</u>

נגדיר *חד קרן* להיות כלי שחמט שהולך 2 משבצות באחד הכיוונים (אופקי או אנכי) ולאחר מכן 0, 1 או 2 משבצות בכיוון ניצב. בתמונה: כל השדות המאוימים על ידי חד קרן.

מהו המספר הגדול ביותר של חדי קרן, שניתן להציב על לוח בגודל 6×6 בלי שיאיימו זה על זה?





<u>תשובה.</u> 16

<u>פתרון.</u>

קודם כל הראה שאפשר להציב 16 כלים: אם נציב את הכלים בריבועים 2 על 2 בפינות הלוח – הכלים לא יאיימו זה על זה.

עכשיו נשאר להוכיח שאי אפשר להציב יותר מ16 כלים:

נשים לב שבכל ריבוע 3 על 3 כל המשבצות הפינתיות מאיימות זו על זו, כלומר אפשר לשים בהן לכל היותר כלי אחד.

נחלק את הלוח לרביעיות משבצות, זוגות משבצות וכמה משבצות בודדות:

יש 16 אזורים, ובכל אזור אפשר לשים לכל היותר כלי אחד. לכן אי אפשר לשים יותר מ16 כלים מבלי שהם יאיימו זה על זה.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח

שלב ב, שנת תשפ"א

שאלה 6.

15 ספורטאים משתתפים בשתי תחרויות ריצה. בבל תחרות, כל ספורטאי מקבל דירוג: הספורטאי הראשון שמסיים את המסלול, מדורג ראשון, הספורטאי השני שמסיים את המסלול, מדורג שני, וכן הלאה עד הספורטאי שמגיע אחרון ומקבל דירוג 15. אף שני ספורטאים לא מסיימים את המסלול בו-זמנית. בשיחת מוטיבציה אישית שנערכה בין שתי התחרויות, נאמר לכל אחד מהם, שהדירוג שלו בתחרות השנייה יהיה טוב יותר מאשר בתחרות הראשונה. הסתבר שדירוג של כל אחד מהספורטאים השתנה לכל היותר ב-3. מהו המספר הגדול ביותר של הספורטאים עבורם הדבר שנאמר בשיחת המוטיבציה יכול להיות נכון?

תשובה. 11

פתרון.

נניח כי יש K ספורטאים שהדירוג שלהם לא עלה ו-$15-K$ ספורטאים שעלו בדירוג. נשים לב שסכום הדירוגים של כל הספורטאים לא השתנה וסכום הדירוגים של K הספורטאים שהדירוג שלהם לא עלה ירד בלכל היותר $3K$. מכך נסיק כי סכום הדירוגים של $15-K$ הספורטאים עלה בלכל היותר $3K$ אבל הדירוג של כל אחד מהם עלה לפחות ב-1 ותכן קיבלנו שמתקיים

$$15 - K \leq 3K$$

כלומר $15 \leq 4K$, אבל K הוא מספק שלם ולכן K הוא לפחות 4, כלומר לכל היותר 11 ספורטאים עלו בדירוג.

נבנה דוגמה שבה רק 4 ספורטאים ירדו בדירוג:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	1	2	3	8	5	6	7	12	9	10	11	15	13	14

בשורה הראשונה הדירוגים של הספורטאים לאחר התחרות הראשונה ובושרה השנייה הדירוגים לאחר התחרות השנייה, כמו שניתן לראות רק הספורטאים שהיו מדורגים במקום הראשון, החמישי, התשיעי והשלושה עשר ירדו בדירוג והשאר עלו בדירוגם.