האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

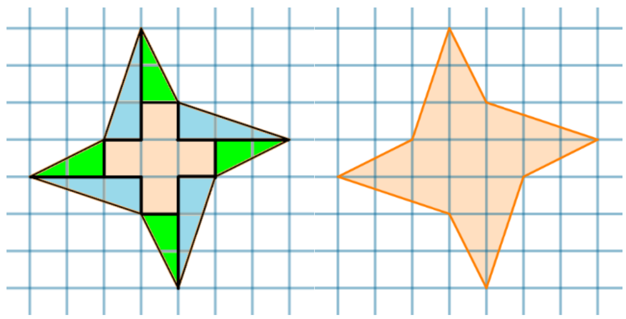
פתרונות – שלב ב, שנת תשפ"א

שאלה 1.

מהו שטח של הצורה?

תשובה. 15

פתרון.



השטח של הצורה: $15 = 5 + 4 + 6$ משבצות.

שאלה 2.

שישה אנשים גרים בקומות שונות של בניין 6-קומתי. מתוכם שניים – שקרנים, ושאר – דוברי אמת. הם אמרו משפטים הבאים:

אלון: "בקומה מעליי גר שקרן."

בני: "שתי קומות מעליי גר שקרן."

גיא: "שלוש קומות מעליי גר שקרן."

דור: "שלוש קומות מתחתיי גר שקרן."

הילל: "השקרנים גרים בקומות 3 ו-4."

ויקטור: "השקרנים גרים בקומות 1 ו-2."

באיזו קומה גר ויקטור?

תשובה. ויקטור יכול לגור בקומות 2,3,4,5,6.

<u>הערה:</u> אפשר היה לשאול באיזו קומה ויקטור לא יכול לגור (קומה 1).

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

פתרונות – שלב ב, שנת תשפ"א

פתרון.

בפתרון נציג את כל האפשרויות של מגורים של כל שישה האנשים, ונוכיח שאין אפשרויות אחרות:

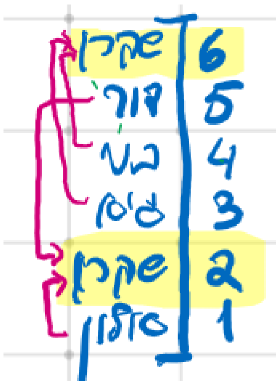
קודם כל נבדוק האם יכול להיות שוויקטור דובר אמת?

אם ויקטור דובר אמת, אז אבי, בני, גיא והילל – כולם משקרים. לכן **ויקטור הוא שקרן**.

עכשיו נפריד למקרים:

מקרה 1: הילל משקר

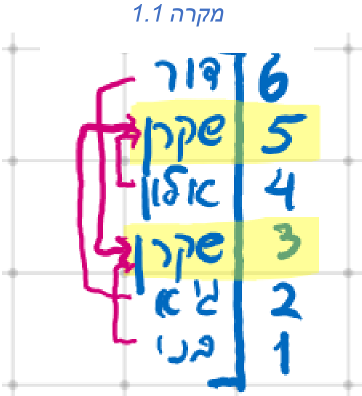
במקרה הזה אבי, בני וגיא כולם גרים מתחת לאיזשהו שקרן, ולכן היחיד שיכול לגור מעל כל השקרנים הוא דור. לכן **השקרן העליון מבין השניים חייב לגור בקומה 5 או 6.**



מקרה 1.1

מקרה 1.1: שקרן עליון גר בקומה 6

לא יכול להיות שאבי, בני וגיא כולם מדברים על שקרן שגר בקומה 6, כי אז אין אפשרות למקום את דור והשקרן השני.
לכן אחד מהם מדבר על השקרן השני, כלומר השקרן השני לא גר בקומה 1. זה משאיר אותנו עם האפשרות שבציור:



מקרה 1.2

מקרה 1.2: שקרן עליון גר בקומה 5

במקרה הזה דור חייב לגור בקומה 6 (אף אחד אחר לא יכול לגור שם), ואז השקרן השני גר 3 קומות מתחת לדור, בקומה 3. נוודא שזה עובד:

מקרה 2: הילל דובר אמת

במקרה הזה השקרנים גרים בקומות 3,4. מעליהם יכולים לגור רק הילל (שעכשיו דובר אמת), ודור (אבל רק בקומה 6). בקומות התחתונות יש כמה אפשרויות: בקומה 2 יכול לגור אבי או בני, ובקומה 1 – בני או גיא.

מקרה 2

זה כל המקרים, וראינו שוויקטור השקרן יכול לגור בכל הקומות חוץ מ-1.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו
פתרונות – שלב ב, שנת תשפ"א

שאלה 3.

בציור טבלת מספרים בגודל 4×4.

סכומי המספרים בכל השורות של הטבלה שלמים ושונים. סכום של כל שורה רשום לידה, חוץ מהשורה עם הסכום הקטן ביותר (השורה התחתונה).

סכומי המספרים בכל העמודות של הטבלה שלמים ושונים. סכום של כל עמודה רשום לידה, חוץ מהעמודה עם הסכום הגדול ביותר (העמודה הימנית).

11	13	16	הגדול	
				13
				17
				15
				הקטן

מהו סכום המספרים בשורה התחתונה?

תשובה. 12

פתרון.

הסכום בשורה התחתונה קטן מ13, לכן הוא שווה ל12 או פחות. לכן סכום כל המספרים בטבלה שווה ל- $13 + 17 + 15 + 12 = 47$ או פחות. (הסכום שווה ל- 47 רק אם הסכום בשורה התחתונה הוא 12) הסכום בעמודה הימנית הוא לפחות 17, לכן סכום כל המספרים בטבלה הוא לפחות $11 + 13 + 16 + 17 = 47$. כלומר סכום של כל המספרים הוא לפחות 47 (בגלל העמודות), ומצד שני הוא לכל היותר 47 (בגלל השורות). לכן הוא חייב להיות 47, וסכום בשורה התחתונה חייב להיות 12.

שאלה 4.

בארץ הקסומה בבתי ספר קיימים רק שלושה ציונים: 1, 2 ו-3 (הציון 3 הכי גבוה, 1 הכי נמוך). כאשר ילד מקבל ציון 2 במבחן, הוא מתאמץ יותר, ובמבחן הבא מקבל 3. כאשר ילד מקבל ציון 1, המורה מתקשרת להורים שלו, ואז הוא מקבל ציוני 3 בשני המבחנים הבאים. במהלך שנת הלימודים התקיימו 10 מבחנים, וכל הציונים של כל תלמיד נרשמו לתעודה. כמה יש אפשרויות שונות לרשימת הציונים בתעודה של תלמיד?

תשובה. 653

פתרון.

במבחן הראשון תלמיד יכול לקבל 1, 2 או 3. נשים לב שאם תלמיד מקבל 3, אז אחריו בא רצף ציונים עם ציון אחד פחות. אם תלמיד מקבל 2, אז אחרי ה-2 בא 3 ואחריו בא רצף של 2 ציונים פחות. ואם תלמיד מקבל 1 אז אחריו באים 3, 3, ואז רצף כלשהו של 3 ציונים פחות.

כלומר, כמות הרצפים של 10 ציונים שווה לסכום כמויות הרצפים של 9, 8 ו-7 ציונים. כמות הרצפים של 9 ציונים שווה לסכום כמויות הרצפים של 8, 7 ו-6 ציונים. וכן הלאה, עד שמגיעים לרצף של 2 ציונים, בו החוקיות מפסיקה להתקיים, כי אם תלמיד מקבל ציון 1, אחריו נשאר רק מבחן אחד (בו הוא מקבל 3)

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

פתרונות – שלב ב, שנת תשפ"א

כדי לחשב את כמות הרצפים האפשריים של 10 ציונים נתחיל מרצפים של 1, 2, 3 ציונים ונתקדם לפי החוקיות:

אורך הרצף	חישוב	כמות הרצפים האפשריים
1	יש רק רצפים "1", "2", "3"	3
2	יש רק רצפים "33" , "32" , "31", "23" , "13"	5
3	יש 5 רצפים "3**" , 3 רצפים "23*" , ורצף "133"	9
4	3+5+9	17
5	5+9+17	31
6	9+17+31	57
7	17+31+57	105
8	31+57+105	193
9	57+105+193	355
10	105+193+355	**653**

שאלה 5.

נתבונן בביטוי:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

אם נרשום את המספר כשבר מצומצם, מה יהיה המכנה?

תשובה. 2520

פתרון.

אפשר לעשות לכל השברים מכנה משותף $2520 = 7 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8$, כי הוא מתחלק בכל המכנים שיש בביטוי.

אבל צריך לוודא שבשבר הסופי שום דבר לא מצטמצם. למשל $1 = \frac{3+2+1}{6} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

נקבל:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10} = 1+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$

נקבץ את השברים שמכנה שלהם מתחלק ב-2 או ב-5:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10} = \frac{10+5+8+4}{40} = \frac{27}{40}$$

כלומר שום דבר לא הצטמצם וקיבלנו:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10} = 1+\frac{27}{40}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$$

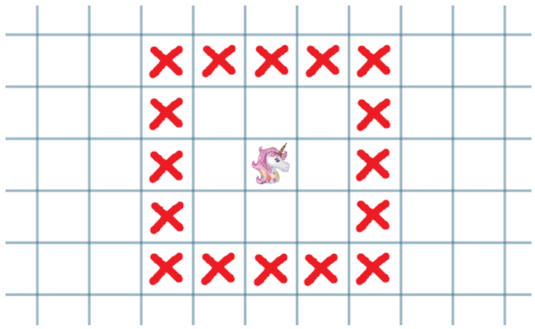
ובהמשך שום דבר כבר לא יכול להצטמצם, כי אין גורמים משותפים למכנים של השברים שנשארו.

לכן המכנה המצומצם של הסכום הוא 2520.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>
פתרונות – שלב ב, שנת תשפ"א

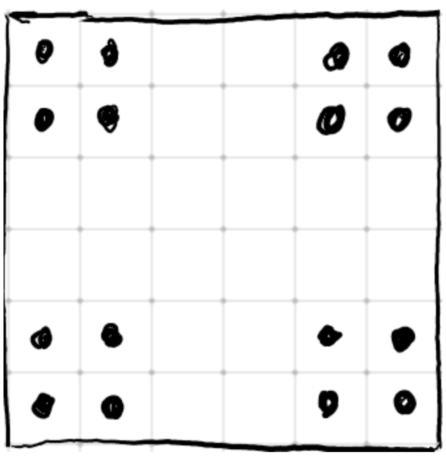
<u>שאלה 6.</u>

נגדיר *חד קרן* להיות כלי שחמט שהולך 2 משבצות באחד הכיוונים (אופקי או אנכי) ולאחר מכן 0, 1 או 2 משבצות בכיוון ניצב. בתמונה: כל השדות המאוימים על ידי חד קרן.



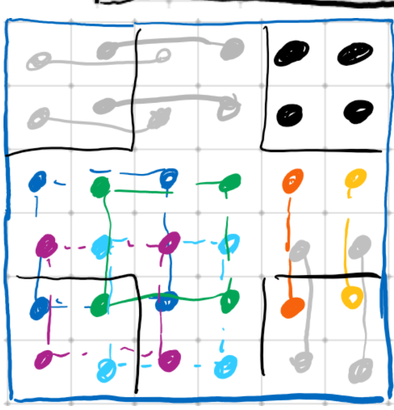
מהו המספר הגדול ביותר של חדי קרן, שניתן להציב על לוח בגודל 6×6 בלי שיאיימו זה על זה?

<u>תשובה.</u> 16



<u>פתרון.</u>
קודם כל הראה שאפשר להציב 16 כלים: אם נציב את הכלים בריבועים 2 על 2 בפינות הלוח – הכלים לא יאיימו זה על זה.

עכשיו נשאר להוכיח שאי אפשר להציב יותר מ16 כלים:
נשים לב שבכל ריבוע 3 על 3 כל המשבצות הפינתיות מאיימות זו על זו, כלומר אפשר לשים בהן לכל היותר כלי אחד.



נחלק את הלוח לרביעיות משבצות, זוגות משבצות וכמה משבצות בודדות: יש 16 אזורים, ובכל אזור אפשר לשים לכל היותר כלי אחד. לכן אי אפשר לשים יותר מ16 כלים מבלי שהם יאיימו זה על זה.