האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט
פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 1.

מהי החזקה המרבית של 3 שמחלקת את המספר $3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot 3333 \cdot 33333 \cdot \ldots \cdot 3333333333$?

הערה: הקלידו את המעריך של החזקה, כלומר, אם המספר הוא 3^n, יש להקליד את n.

תשובה. 14

פתרון.

נשים לב כי $3 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 3333333333 = 3^{10} \cdot 1 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 1111111111$. בין המספרים מהצורה $11 \ldots 1$ המספרים שמתחלקים ב-3 אלה 111, 111111 ו-111111111 (למשל, לפי סימן חלוקה ב-3). המספר 111111111, מעבר לזה, מתחלק ב-9, אבל לא מתחלק ב-27. לכן בסך הכל המספרים האלה תורים 4 לחזקה של 3. לכן סך 3 נכנס לפירוק של המספר המקורי לראשוניים 14 פעמים.

שאלה 2.

אבי, בני וגילי פתרו ביחד 100 שאלות מתמטיות (לא נשארו שאלות לא פתורות). כל אחד פתר 60 שאלות. נקרא לשאלה *קשה* אם רק בן אדם אחד פתר אותה, ונקרא לשאלה *קלה* אם שלושתם פתרו אותה. מהו ההפרש הגדול ביותר האפשרי בין כמות השאלות הקשות לכמות השאלות הקלות?

תשובה. 20

פתרון.

נסמן: x מספר השאלות הקלות, y מספר השאלות הבינוניות (כאלה שנפתרו על ידי 2 אנשים), z מספר השאלות הקשות. אזי מספר הפתרונות הכולל שנכתבו הוא $3x + 2y + z$. בגלל שכל תלמיד פתר 60 שאלות, המספר הזה שווה גם ל-$3 \cdot 60 = 180$. בנוסף, $x + y + z = 100$ כי יש סך הכל 100 שאלות.

$$180 = 3x + 2y + z = 2 \cdot (x + y + z) + x - z = 2 \cdot 100 + x - z$$

מעבירים אגפים מקבלים: $z - x = 20$.

שאלה 3.

נתונים 100 מספרים ממשיים. מגדילים כל אחד מהמספרים ב-1, כתוצאה מכך סכום הריבועיים של המספרים לא משתנה. כיצד ישתנה סכום הריבועים של המספרים, אם נגדיל כל אחד מהם ב-1 עוד פעם נוספת?

תשובה. הסכום יגדל ב-200.

פתרון.

נסמן את המספרים $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$. אזי סכום הריבועים שלהם הוא ${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \cdots + {a_{100}}^2$, וסכום הריבועים של המספרים המוגדלים ב-1 הוא

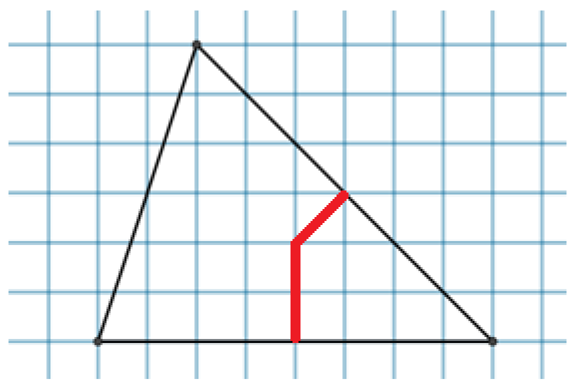
$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \cdots + (a_{100} + 1)^2$$
$$= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_{100}}^2) + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}) + 100$$

מכאן, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = -50$. נרשום סכום הריבועים של המספרים שהוסיפו להם 1 בפעם השנייה:

$$(a_1+2)^2+(a_2+2)^2+\cdots+(a_{100}+2)^2$$
$$=({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{100}}^2)+4(a_1+a_2+\cdots+a_{100})+400=$$
$$({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{100}}^2)-4\cdot 50+400=({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{100}}^2)+200$$

שאלה 4.

בתמונה משולש. מצאו את שטח הריבוע שחסום במעגל שחוסם את המשולש.
הערה: השטח נמדד במשבצות בשאלה הזאת.



תשובה. 40.

פתרון. אנו יודעים שמרכז המעגל החוסם נמצא בנקודת מפגש האנכים האמצעים. בציור שלנו קל להעביר אנך אמצעי לצלע האופקי, וגם לצלע הימני כי הוא ב- 45°, והאנכים נפגשים בנקודה של סריג. כאשר מחשבים מרחק אופקי ואנכי לכל אחד מקודקודי המשולש, רואים שאחד מהם הוא 2 והאחר הוא 4, לכן לפי משפט פיתגורס רדיוס המעגל החוסם שהוא שווה למרחק מהמרכז לקודקוד שווה ל- $R=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.
נניח שריבוע עם צלע באורך a חסום באותו המעגל, ונחבר את מרכזו לשני קודקודים של אותו צלע. נוצר משולש ישר זווית, שהניצבים שלו באור R והיתר שלו באורך a. לכן $a^2=R^2+R^2=20+20=40$.
אבל בעצם $a^2=40$ זה גם השטח של הריבוע.

שאלה 5.

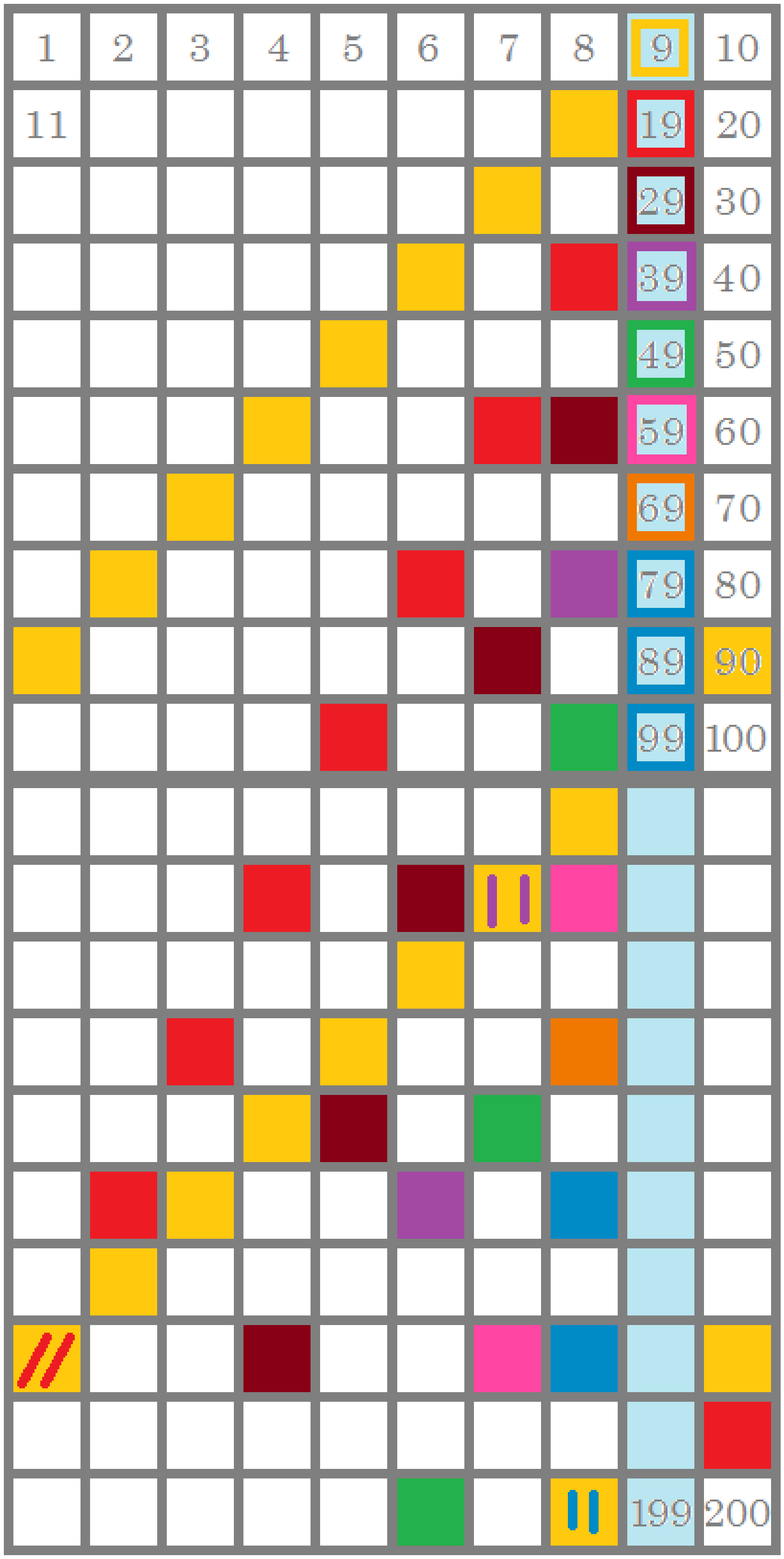
לכמה מספרים מ-1 עד 200 אין מחלק שמסתיים ב-9?
הערה: מספר מסתיים ב-9 פירושו שספרת היחידות שלו היא 9.

תשובה. 42

פתרון. ניתן לרשום את המספרים מ-1 עד 200 בתור טבלת משבצות עם 10 עמודות ו-20 שורות. נצייר מלבן כזה על דף משבצות, ולא נרשום בו את כל המספרים. להוסיף 9 בטבלה זאת זה כמו ללכת באלכסון למטה ושמאלה (אלה אם כו אנו נמצאים במשבצת השמאלית של הטבלה, ואז קופצים משם ישר למשבצת הימנית. באופן דומה להוסיף 19 זה כמו לעשות מהלך אחד שמאלה ושתיים ימינה, וכך הלאה. נסמן בטבלה זו את כל הכפולות של כל המספרים שמתחלקים ב-9, 19, 29, ... אבל קודם כל נסמן את כל העמודה התשיעית:

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט</u>

פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט
פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

זה לא באמת הרבה עבודה, אחרי 49 אפשר להכפיל את המספר שמסתיים ב-9 ב-2 או ב-3 לכל היותר, וזה בעצם גורם לנו לסמן כל מספר זוגי בעמודה 8 וכל מספר שלישי בעמודה 7.

כעת נספור בעמודות 10, 5, 4, 3, 2, 1

נמצאות בהתאמה 3, 4, 4, 3, 3, 2 משבצות מסומנות, וזה ביחד 19 משבצות.

בעמודה 6 מסמנים כל משבצת רביעית וזה נותן 5, ויש גם משבצת נוספת שמתחלקת ב-9, סה"כ 6 משבצות.

בעמודה 7 סימנו כל משבצת שלישית, וזה נותן גם 6 משבצות.

בעמודה 8 סומנו 10 משבצות בשורות זוגיות ועוד משבצת 108, סה"כ 11.

בסה"כ מקבלים $19+6+6+11=30+12=42$.

<u>שאלה 6.</u>
נתונה עוגה בגודל 36×36. אבי חותך מהעוגה שלוש חתיכות בצורת ריבוע בגודל 12×12, עם צלעות שמקבילות לצלעות של העוגה (שימו לב, החיתוכים לא חייבים לעבור על קווי הרשת 36×36). אחרי זה בני חותך מהעוגה שנשארה חתיכה בצורת ריבוע. מה השטח הגדול ביותר של החתיכה שבני יכול לקבל בוודאות, ללא תלות בפעולות של אבי?

<u>תשובה.</u> 144.

<u>פתרון.</u>
נראה כי בני תמיד יכול לחתוך חתיכה בגודל 12×12. נחלק את העוגה ל-9 ריבועים שווים (ראו ציור א') . כל חתיכה שאבי חותך, יכולה "להרוס" לכל היותר אזור כחול אחד (שזה ריבוע 12×12). בגלל שאבי חותך רק 3 חתיכות ויש 4 אזורים כחולים, אחד מהם בוודאות יישאר, ובני יוכל לחתוך אותו.
נראה כי יש מקרה בו בני לא יכול לחתוך חתיכה גדולה יותר – ראו ציור ב'.