



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 1.

מספרים שלמים וחיוביים x ו- y מקיימים את המשוואה: $(x - 3y)(x + 3y) = 900$. מצאו את x .

תשובה 78.

פתרון.

נפרק את 900 לגורמים ראשוניים ונקבל: $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. לכן, המספרים $x - 3y$ ו- $x + 3y$ צריכים להיות מורכבים מהגורמים הראשוניים האלה. נשים לב ששני המספרים $x - 3y$ ו- $x + 3y$ הם בהכרח מאותה זוגיות (כהפרש וסכום של שני מספרים טבעיים). לא ייתכן ששניהם אי זוגיים, לכן שניהם זוגיים. כמו כן, אם אחד מהם מתחלק ב-3, אז גם השני, כי ההפרש ביניהם זה $6y$ שזה מתחלק ב-3. לא ייתכן ששניהם לא מתחלקים ב-3, לכן שניהם מתחלקים ב-3. עד עכשיו ראינו שבכל אחד מהמספרים האלה יש גורם ראשוני 2 וגורם ראשוני 3:

$$(x - 3y)(x + 3y) = 900$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{matrix}$$

נשאר להבין כיצד לחלק ביניהם את ה-"חמשים". בגלל ש- y חיובי, $x - 3y < x + 3y$. לכן, האפשרות היחידה היא לכלול את שני ה-"חמשים" האלה בפירוק של $x + 3y$. מכאן,

$$x - 3y = 6$$

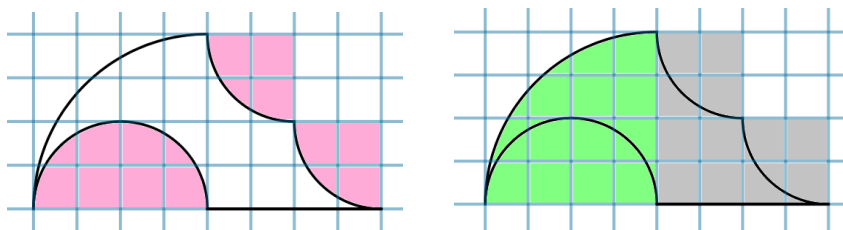
$$x + 3y = 150$$

$$x = \frac{(x-3y)+(x+3y)}{2} = \frac{6+150}{2} = 78, \text{ מכאן,}$$

שאלה 2.

בתמונה צורה שמורכבת ממספר קשתות מעגליות וקטע ישר. הקשתות המסומנות בירוק מהוות רבעי מעגלים, הקשת המסומנת באדום מהווה חצי מעגל. מצאו את שטח הצורה במשבצות.

תשובה 12.



פתרון.

השטח של הצורה שווה לשטח האפור, ועוד השטח הירוק, פחות השטחים הוורודים:

$$12 + \frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 12$$



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 3.

פרש הוא כלי שחמט שהולך שתי משבצות באחד הכיוונים (אופקי או אנכי) ולאחר מכן משבצת אחת בכיוון ניצב. מהו המספר הגדול ביותר של פרשי שח, שניתן להציב על לוח בגודל 5×5 בלי שיאימו זה על זה?

תשובה 13.

פתרון.

דוגמה ל-13 פרשים: מציבים פרש על כל משבצת שחורה של הלוח (ראו ציור א'). הסבר למה אי אפשר יותר מ-13: נחלק את כל המשבצות של הלוח, חוץ מהמשבצת המרכזית, לזוגות, כך שבכל זוג המשבצות מחוברות על ידי מסע אחד של פרש (ראו ציור ב'). סך הכל יהיו 12 זוגות כאלה. בכל זוג, ניתן להציב פרש לכל היותר על משבצת אחת. לכן לא ניתן להציב על הלוח יותר מ-13 פרשים. $12 + 1 = 13$

2	3	1	4	5
1	12	2	3	6
10	11		5	4
12	9	8	6	7
11	10	7	9	8

♘		♘		♘
	♘		♘	
♘		♘		♘
	♘		♘	
♘		♘		♘

שאלה 4.

במחסן היו מספר גושי גבינה זהים (ושלמים). בלילה הגיעו עכברים ואכלו 10 גושי גבינה. כל עכבר אכל כמות שווה של גבינה בלילה הזה. אחרי זה לחלק מהעכברים כאבה הבטן, ואז בלילה הבא רק 7 מהם חזרו לאכול את הגבינה. כל אחד מהם אכל חצי מכמות הגבינה שהוא אכל בלילה הראשון, והם סיימו את כל הגבינה במחסן. כמה גושי גבינה היו במחסן בהתחלה?

תשובה 11.

פתרון.

נסמן את המספר הכולל של העכברים דרך k . אזי כל עכבר אכל בלילה הראשון $\frac{10}{k}$ גבינה. בלילה השני כל אחד מ-7 העכברים אכל חצי מהכמות הזאת, כלומר $\frac{5}{k}$ גבינה. לכן, ביחד 7 העכברים אכלו בלילה השני $7 \cdot \frac{5}{k} = \frac{35}{k}$ גבינה. שימו לב שבגלל שסך הכל היה מספר שלם של גושי גבינה, וגם 10 שלם, אז גם המספר הזה שלם. כלומר, k צריך להיות מחלק של 35. בנוסף, $k > 7$. לכם האפשרו היחידה ל- k היא 35, ואז מספר גושי הגבינה הוא 11.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 5.

אבי, בני וגילי פתרו ביחד 100 שאלות מתמטיות (לא נשארו שאלות לא פתורות). כל אחד פתר 60 שאלות. נקרא לשאלה קשה אם רק בן אדם אחד פתר אותה, ונקרא לשאלה קלה אם שלושתם פתרו אותה. מהו ההפרש הגדול ביותר האפשרי בין כמות השאלות הקשות לכמות השאלות הקלות?

תשובה 20.

פתרון.

נסמן: x מספר השאלות הקלות, y מספר השאלות הבינוניות (כאלה שנפתרו על ידי 2 אנשים), z מספר השאלות הקשות. אזי מספר הפתרונות הכולל שנכתבו הוא $3x + 2y + z$. בגלל שכל תלמיד פתר 60 שאלות, המספר הזה שווה גם ל- $3 \cdot 60 = 180$. בנוסף, $x + y + z = 100$ כי יש סך הכל 100 שאלות.

$$180 = 3x + 2y + z = 2 \cdot (x + y + z) + x - z = 2 \cdot 100 + x - z$$

$$z - x = 20 \text{ מעבירים אגפים מקבלים: } z - x = 20$$

שאלה 6.

לכמה מספרים מ-1 עד 200 אין מחלק שמסתיים ב-9?
הערה: מספר מסתיים ב-9 פירושו שספרת היחידות שלו היא 9

תשובה 42.

פתרון. ניתן לרשום את המספרים מ-1 עד 200 בתור טבלת משבצות עם 10 עמודות ו-20 שורות. נצייר מלבן כזה על דף משבצות, ולא נרשום בו את כל המספרים. להוסיף 9 בטבלה זאת זה כמו ללכת באלכסון למטה ושמאלה (אלה אם כו אנו נמצאים במשבצת השמאלית של הטבלה, ואז קופצים משם ישר למשבצת הימנית. באופן דומה להוסיף 19 זה כמו לעשות מהלך אחד שמאלה ושתיים ימינה, וכך הלאה. נסמן בטבלה זו את כל הכפולות של כל המספרים שמתחלקים ב-9, 19, 29, ... אבל קודם כל נסמן את כל העמודה התשיעית:



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

זה לא באמת הרבה עבודה, אחרי 49 אפשר להכפיל את המספר שמסתיים ב-9 או ב-2 או ב-3 לכל היותר, וזה בעצם גורם לנו לסמן כל מספר זוגי בעמודה 8 וכל מספר שלישי בעמודה 7.

כעת נספור בעמודות 10, 5, 4, 3, 2, 1

נמצאות בהתאמה 3, 4, 4, 3, 2 משבצות מסומנות, וזה ביחד 19 משבצות.

בעמודה 6 מסמנים כל משבצת רביעית וזה נותן 5, ויש גם משבצת נוספת שמתחלקת ב-9, סה"כ 6 משבצות.

בעמודה 7 סימנו כל משבצת שלישית, וזה נותן גם 6 משבצות.

בעמודה 8 סומנו 10 משבצות בשורות זוגיות ועוד משבצת 108, סה"כ 11.

בסה"כ מקבלים $19 + 6 + 6 + 11 = 30 + 12 = 42$.