



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 1.

יוסי התחיל לעבוד בחווה. השכר השנתי שלו היה אמור להיות 260 לירות וכבש. אבל, אחרי 8 חודשי עבודה יוסי החליט לפרוש, ואז הוא קיבל 100 לירות וכבש. כמה עולה כבש?
הערה: השכר החודשי של יוסי במהלך השנה היה קבוע.

תשובה 220.

פתרון.

הפרש בין השכר של 12 חודשי עבודה לשכר של 8 חודשי עבודה עומד על 160 לירות, לכן 160 לירות זה השכר ל-4 חודשי עבודה. אזי השכר לחודש עבודה אחד הוא $40 = 160 : 4$ לירות, והשכר השנתי בלירות הוא $480 = 40 \times 12$. לכן הכבש עולה $480 - 260 = 220$ לירות.

שאלה 2.

בארגז 100 פירות: לימונים, תפוזים ובננות. מספר התפוזים קטן יותר ממחצית מספר הבננות, מספר הלימונים קטן יותר ממחצית מספר התפוזים. מהו המספר בגדול ביותר של לימונים שיכול להיות בארגז?
בארגז 100 פירות: לימונים, תפוזים ובננות. מספר התפוזים קטן יותר ממחצית מספר הבננות, מספר הלימונים קטן יותר ממחצית מספר התפוזים. מהו המספר בגדול ביותר של לימונים שיכול להיות בארגז?

תשובה 13.

פתרון.

קודם נבדוק שהמקרה של 13 לימונים אפשרי. אכן, יכול להיות 13 לימונים, 27 בננות ו-60 תפוזים, והמספרים האלה מקיימים את כל התנאים הנדרשים.
נראה כי לא יכול להיות יותר מ-13 לימונים. אם יהיה לפחות 14, אז מספר הבננות יהיה לפחות $1 + 14 \times 2 = 29$, ואז מספר התפוזים יהיה לפחות $59 = 1 + 29 \times 2$. אבל, $102 = 59 + 29 + 14$ שזה כבר עובר את 100.

הערה. באופן פורמלי, הפתרון לעיל הוא פתרון מלא: הראנו ש-13 לימונים זה אפשרי והראנו שיותר מ-13 זה כבר בלתי אפשרי. אבל הפתרון לא מסביר כיצד אפשר להגיע למספר שבתשובה, לכן נסביר את זה בקצרה כאן. שימו לב שמספר הבננות גדול מפעמיים מספר הלימונים, ומספר התפוזים גדול מפעמיים ממספר הבננות, וכתוצאה מכך, גדול מ-4 פעמים מספר הלימונים. לכן סך מספר הפירות בארגז גדול מ-7 פעמים מספר הלימונים, כלומר, מספר הלימונים קטן משביעית של 100. לכן, מספר הלימונים קטן או שווה ל-14. בודקים את 14 ורואים שזה לא עובד, אז יורדים ל-13 ובודקים ש-13 כבר עובד.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-10 פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 3.

כל תושב של הארץ הקסומה או דובר אומת (תמיד אומר אמת), או שקרן (תמיד משקר). 12 תושבי הארץ הקסומה ישבו סביב שולחן עגול. כל אחד מהם הצביע על כל האנשים שישבו סביב השולחן חוץ מעצמו ומשני שכניו (משמאל ומימין) וטען: "כולכם שקרנים!" כמה שקרנים ישבו ליד השולחן?

תשובה 10.

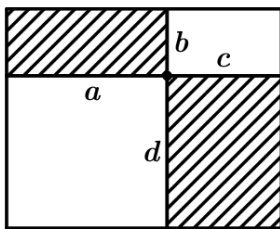
פתרון.

בין האנשים שיושבים סביב השולחן, יש לפחות דובר אמת אחד, כי אחרת השקרנים אמרו אמת, וזה בלתי אפשרי. נתבונן בדובר האמת. בגלל שהוא אמר אמת, 9 האנשים שהם לא שכנים שלו, בוודאות שקרנים. השכנים שלו לא יכולים להיות שניהם שקרנים, כי במקרה זה כל אחד מהם אמר אמת. אבל הם לא יכולים להיות שניהם דוברי אמת, כי במקרה זה כל אחד מהם שיקר. לכן, אחד מהם חייב להיות דובר אמת ואחד מהם חייב להיות שקרן. בודקים ורואים שהאפשרות הזאת אכן עובדת.

שאלה 4.

בתמונה מספר מלבנים. המספרים מסמנים את שטחי המלבנים. מצאו את שטח המלבן המסומן בסימן שאלה.

תשובה 110.



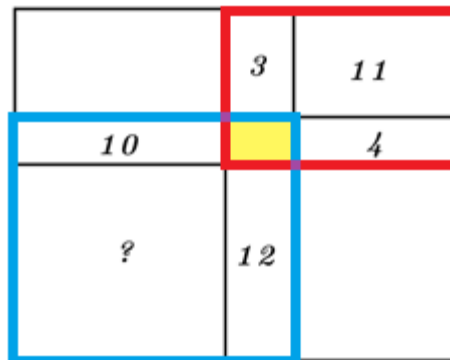
טענת עזר. בהינתן מלבן שמחולק ל-4 מלבנים קטנים יותר כמתואר בציור, מכפלת השטחים המקווקוים שווה למכפלת השטחים הלבנים בתוך המלבן.

הוכחת הטענה. מכפלת השטחים המקווקוים שווה ל- $ab \cdot cd = abcd$.

מכפלת השטחים הלבנים שווה ל- $bc \cdot ad = abcd$.

פתרון השאלה.

נתבונן במלבן עם המסגרת האדומה. לפי הטענה, שטח של החלק הצהוב שווה ל- $\frac{12}{11}$. אחרי זה נתבונן במלבן עם המסגרת הכחולה. לפי הטענה, שטח של החלק המסומן על ידי סימן שאלה שווה ל-110.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-10
פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 5.

פרש הוא כלי שחמט שהולך שתי משבצות באחד הכיוונים (אופקי או אנכי) ולאחר מכן משבצת אחת בכיוון ניצב. מהו המספר הגדול ביותר של פרשי שח, שניתן להציב על לוח בגודל 5×5 בלי שיאיימו זה על זה?

תשובה 13.

פתרון.

דוגמה ל-13 פרשים: מציבים פרש על כל משבצת שחורה של הלוח (ראו ציור א'). הסבר למה אי אפשר יותר מ-13: נחלק את כל המשבצות של הלוח, חוץ מהמשבצת המרכזית, לזוגות, כך שבכל זוג המשבצות מחוברות על ידי מסע אחד של פרש (ראו ציור ב'). סך הכל יהיו 12 זוגות כאלה. בכל זוג, ניתן להציב פרש לכל היותר על משבצת אחת. לכן לא ניתן להציב על הלוח יותר מ-13 פרשים.

2	3	1	4	5
1	12	2	3	6
10	11		5	4
12	9	8	6	7
11	10	7	9	8

♞		♞		♞
	♞		♞	
♞		♞		♞
	♞		♞	
♞		♞		♞

שאלה 6.

נקרא למספר *מיוחד*, אם מכפלת ספרותיו שווה ל-6. כמה יש מספרים שש-ספרתיים מיוחדים?

תשובה 36.

פתרון.

נפרק את 6 לגורמים ראשוניים: $6 = 2 \times 3$. כדי שמכפלת הספרות של המספר תהיה 6, צריך שכל הגורמים הראשוניים של ספרות המספר הזה יהיו 2 ו-3. אפשר לחשוב על זה כעל 6 "קופסאות", שאנחנו צריכים לשים בהם את המספרים 2 ו-3.



את 2 אפשר לשים בכל אחד מ-"הקופסאות", שזה 6 אפשרויות, וגם את 3 אפשר לשים בכל אחת מ-"הקופסאות", שגם זה 6 אפשרויות. לכן סך הכל מספר האפשרויות הינו $6 \times 6 = 36$.