



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 1.

לאספת הורים הגיעו הורים של 27 תלמידים: 19 אימהות ו-15 אבות. מהו מספר הילדים ששני ההורים שלהם הגיעו?

תשובה 7.

פתרון.

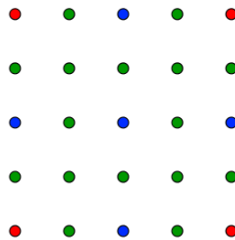
סך הכל הגיעו $15 + 19 = 34$ הורים. אילו לכל ילד היה מגיע רק מישהו אחד, היו 27 הורים. כלומר, בנוסף לזה הגיעו עוד 7 אנשים, הורה אדם אחד לילד. זה אומר שיש 7 ילדים ששני ההורים שלהם הגיעו.

שאלה 2.

בתמונה 4 נקודות אדומות שיוצרות ריבוע. יוסי מעביר את כל הקטעים האפשריים עם קצוות אדומים, ואז מסמן אמצע של כל קטע שהוא העביר על ידי נקודה כחולה. אחרי זה דני מעביר את כל הקטעים האפשריים עם קצה אחד כחול וקצה אחד אדום, ואז מסמן אמצע של כל קטע שהוא העביר על ידי נקודה ירוקה. כמה נקודות ירוקות יסמן דני?
הערה: אם נקודה מהווה אמצע של מספר קטעים, מסמנים אותה רק פעם אחת.

תשובה 16.

פתרון.



שאלה 3.

יוסי התחיל לעבוד בחווה. השכר השנתי שלו היה אמור להיות 260 לירות וכבש. אבל, אחרי 8 חודשי עבודה יוסי החליט לפרוש, ואז הוא קיבל 100 לירות וכבש. כמה עולה כבש?
הערה: השכר החודשי של יוסי במהלך השנה היה קבוע.

תשובה 220.

פתרון.

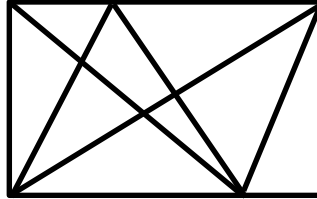
הפרש בין השכר של 12 חודשי עבודה לשכר של 8 חודשי עבודה עומד על 160 לירות, לכן 160 לירות זה השכר ל-4 חודשי עבודה. אזי השכר לחודש עבודה אחד הוא $40 = 160 : 4$ לירות, והשכר השנתי בלירות הוא $480 = 12 \times 40$. לכן הכבש עולה $480 - 260 = 220$ לירות.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לביתות ג-ד
פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 4.

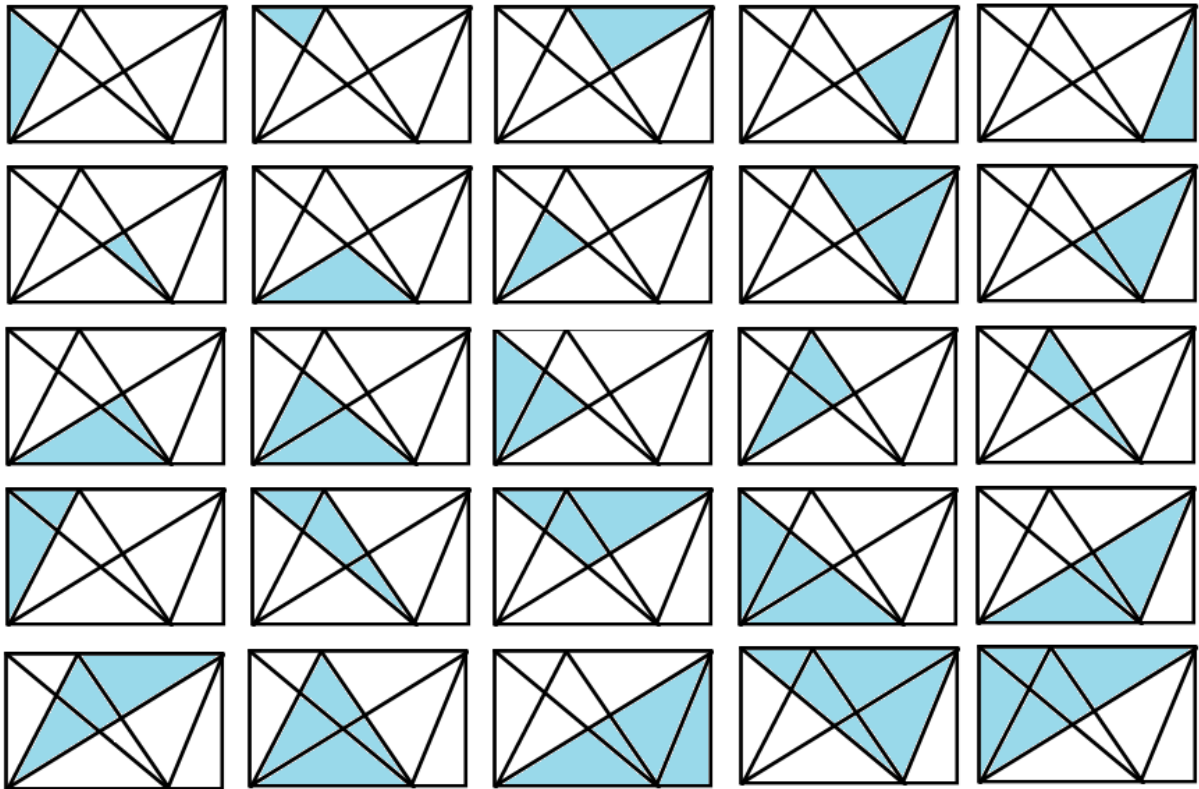
כמה משולשים יש בתמונה?



הערה: יש לספור את כל המשולשים שניתן לצייר על קווים שיש בתמונה.

תשובה 25.

פתרון.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד פתרונות – שלב ב חילופי, שנת תשפ"א

שאלה 5.

בארגז 100 פירות: לימונים, תפוזים ובננות. מספר התפוזים קטן יותר ממחצית מספר הבננות, מספר הלימונים קטן יותר ממחצית מספר התפוזים. מהו המספר בגדול ביותר של לימונים שיכול להיות בארגז?

תשובה 13.

פתרון.

קודם נבדוק שהמקרה של 13 לימונים אפשרי. אכן, יכול להיות 13 לימונים, 27 בננות ו-60 תפוזים, והמספרים האלה מקיימים את כל התנאים הנדרשים.

נראה כי לא יכול להיות יותר מ-13 לימונים. אם יהיה לפחות 14, אז מספר הבננות יהיה לפחות $29 = 14 + 1 \times 2$, ואז מספר התפוזים יהיה לפחות $59 = 29 + 1 \times 2$. אבל, $102 = 14 + 29 + 59$ שזה כבר עובר את 100.

הערה. באופן פורמלי, הפתרון לעיל הוא פתרון מלא: הראנו ש-13 לימונים זה אפשרי והראנו שיותר מ-13 זה כבר בלתי אפשרי. אבל הפתרון לא מסביר כיצד אפשר להגיע למספר שבתשובה, לכן נסביר את זה בקצרה כאן. שימו לב שמספר הבננות גדול מפעמיים מספר הלימונים, ומספר התפוזים גדול מפעמיים ממספר הבננות, וכתוצאה מכך, גדול מ-4 פעמים מספר הלימונים. לכן סך מספר הפירות בארגז גדול מ-7 פעמים מספר הלימונים, כלומר, מספר הלימונים קטן משביעית של 100. לכן, מספר הלימונים קטן או שווה ל-14. בודקים את 14 ורואים שזה לא עובד, אז יורדים ל-13 ובודקים ש-13 כבר עובד.

שאלה 6.

מצאו מספר 5-ספרתי המקיים את שני התנאים הבאים:

- סכום ספרותיו מתחלק ב-7;

- אם נוסיף למספר הזה 1, נקבל מספר שסכום ספרותיו מתחלק ב-7.

תשובה 699999.

פתרון.

בדרך כלל, כשאנחנו עוברים ממספר למספר הבא, סכום הספרות גדל ב-1, כי ספרת היחידות גדלה ב-1 ושאר הספרות לא משתנות. ברור שזה לא יכול להיות המקרה. אבל, יש מקרים בהם לא רק ספרת היחידות משתנה, אלא גם ספרת העשרות: כאשר ספרת היחידות היא 9. במקרה זה סכום ספרות קטן ב-9 (בגלל ספרת היחידות) וגם גדל ב-1, כלומר, בסך הכל קטן ב-8. נשים לב שאם גם ספרת העשרות במספר המקורי היא 9, אז גם ספרת המאות תשתנה (ואז סכום הספרות יקטן ב-17 = 9 + 9 - 1), וכן הלאה: כל פעם סכום הספרות יקטן במספר מהצורה $9 + 9 + \dots + 9 - 1$. במקרה שלנו סכום ספרות מתחלק ב-7 גם במספר המקורי, וגם במספר החדש. זה אומר שסכום הספרות צריך להשתנות במספר שמתחלק ב-7. המספר הקטן ביותר מהצורה $9 + \dots + 9 - 1$, שמתחלק ב-7, הינו $35 = 9 + 9 + 9 + 9 - 1$. זה אומר שארבע הספרות האחרונות של המספר חייבות להיות 9, ואז הספרה היחידה שהיא לא 9 היא הספרה הראשונה. האפשרות היחידה לספרה הזאת, עבורה סכום כל הספרות יתחלק ב-7, היא 6, ואז המספר הוא 699999. שימו לב שבעצם הראנו גם שזאת האפשרות היחידה למספר כזה.