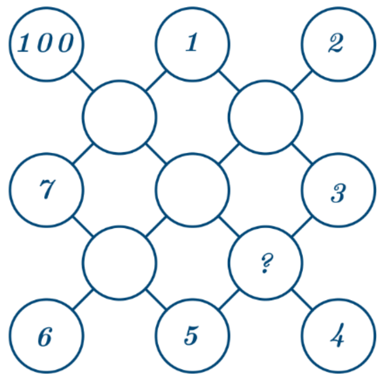
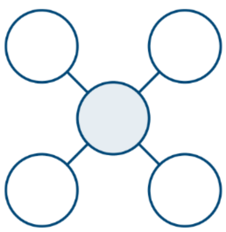
<u>مسابقة الأولمبياد القطرية في الرياضيات للصّفوف: تاسع</u>

حلول - المرحلة أ، سنة 2021

<u>سؤال 1.</u>
نتمعَّن في المُخَطَّط التّالي:





كل عدد في المُخطَّط يربط بين 4 أعداد أخرى، يجب أن يكون مساويا لمُعدَّلهم:

ما هو العدد في الدائرة المُشار إليها بعلامة سؤال؟

<u>الجواب.</u> 6

<u>الحلّ.</u>

نحسب أولا قيمة العدد في مركز المربّع. إذا عرفناه، يمكننا أن نحسب باقي الأعداد، بما في ذلك العدد المشار إليه بِ ؟.

نُشير إلى العدد في الدائرة التي في المركز بِ x، وإلى الأعداد في الدوائر المجاورة له بالأحرف - a, b, c, d.

بحسب المعطيات $4x = a + b + c + d$ ، لكن من جهة أخرى:

$$4a + 4b + 4c + 4d = (1 + 2 + 3 + x) + (3 + 4 + 5 + x) + (5 + 6 + 7 + x) + (7 + 100 + 1 + x)$$

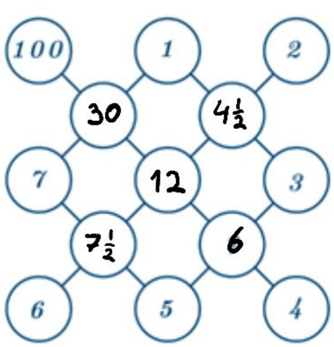
هذا يعني أننا حصلنا على: $16x = 4x + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7 + 7 + 100 + 1$

$$12x = 44 + 100 = 144$$

$$x = 12$$

لذلك $? = \frac{12+3+4+5}{4} = \frac{24}{4} = 6$

يمكننا أن نجد بقية الأعداد لنتأكد أنَّ الجواب الذي حصلنا عليه صحيحا حقا:

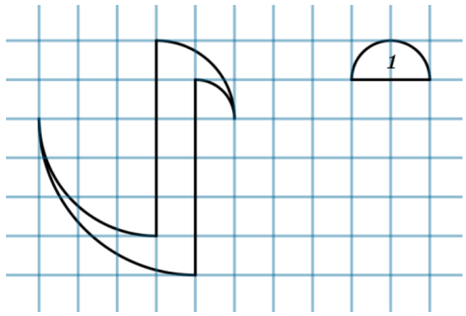


مسابقة الأولمبياد القطرية في الرياضيات للصّفوف: تاسع

حلول - المرحلة أ، سنة 2021

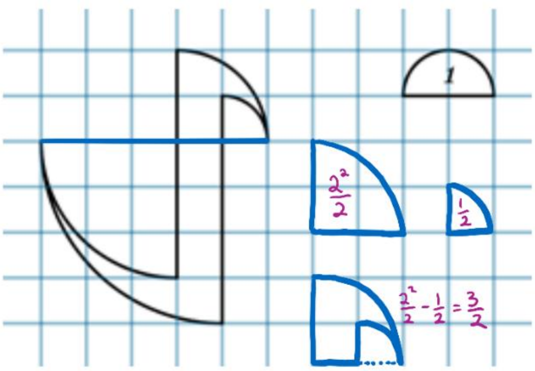
سؤال 2.

في الصّورة، مساحة نصف الدائرة تساوي 1. جِدوا مساحة الشكل الكبير، إذا عُلِم أنَّ الخُطوط المُنحنية في الصّورة هي أرباع دوائر.



الجواب. 5

الحلّ.



نلفت انتباهنا إلى أنَّ مساحة ربع دائرة نصف قطرها مساوٍ لضلع تربيعة واحدة هي $\frac{1}{2}$، لذلك مساحة ربع دائرة نصف قطرها a مرّات ضلع تربيعة هي $\frac{1}{2}\cdot a^2$.

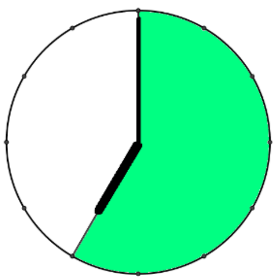
إذا قمنا بمدّ خط مستقيم أفقي من الطرف الأيسر للصورة إلى الطرف الأيمن (كما يظهر في الرسم)، نرى أنَّ الشكل ينقسم لقسمين. القسم العُلوي هو ربع دائرة نصف قطرها تربيعتين أنقصوا منها ربع دائرة نصف قطرها تربيعة واحدة، والقسم السُفلي هو ربع دائرة نصف قطرها 4 تربيعات أنقصوا منها ربع دائرة نصف قطرها 3 تربيعات. بالإجمال المساحة هي:

$$\frac{4^2}{2}-\frac{3^2}{2}+\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{16-9+4-1}{2}=\frac{10}{2}=5$$

مسابقة الأولمبياد القطرية في الرياضيات للصّفوف: تاسع
حلول - المرحلة أ، سنة 2021

سؤال 3.
بعد كَم دقيقة بعد الساعة 7:00 تكون الزاوية بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق درجة واحدة أول مرَّة؟
ملاحظة: تتحرك عقارب الساعة بتواصل وبسرعة ثابتة.

الجواب. 38

الحلّ.


عند الساعة 7:00 تكون الزاوية بين عقربي الساعة 150°. بما أنَّ عقرب الدقائق يتحرك بسرعة أكبر من عقرب الساعات، الزاوية ذات الأهمية بالنسبة لنا هي الزاوية الخارجية 210°. كي تكون الزاوية بين عقربي الساعة 1° لأول مرة، عقرب الدقائق يجب أنْ قريبا جدا من عقرب الساعات، وبالإجمال عقربي الساعة يجب أن يغلقا فجوة مقدارها 209°.

يتحرك عقرب الساعات بسرعة مقدارها 30° في الساعة، وعقرب الدقائق يتحرك بسرعة مقدارها 360° في الساعة. لذلك، السرعة التي يتحرك بها عقرب الدقائق كي "يلحَق" بعقرب الساعات هي 330° في الساعة. علينا أن نغلق فجوة 209°، لذلك تَمُرّ $\frac{209}{330}=\frac{19}{30}=\frac{38}{60}$ من الساعة، أي 38 دقيقة.

سؤال 4.
أخذت غزالة جميع الأعداد التي تقبل القسمة على 3 ابتداء من العدد 1 وحتى العدد 99 ورفعت كل عدد للقوّة الثانية، ثمَّ جمعت النتائج ومن ثمَّ ضربت العدد الذي حصلت عليه بِ 2. أخذت إوَزّة جميع الأعداد التي لا تقبل القسمة على 3 ابتداء من العدد 1 وحتى العدد 100، ورفعت كل عدد للقوّة الثانية، ثم جمعت النتائج. ما هو الفرق بين العدد الذي حصلت عليه الغزالة والعدد الذي حصلت عليه الإوَزّة؟

الجواب. 67

الحلّ.
يجب أن نحسب قيمة التعبير التالي:

$$1^2+2^2+4^2+5^2+7^2+\cdots.+100^2-2\cdot(3^2+6^2+9^2+\cdots+99^2)$$

نقوم بتجميع الأعداد بالصورة التالية:

$$1^2+(2^2-2\cdot3^2+4^2)+(5^2-2\cdot6^2+7^2)+\cdots+(98^2-2\cdot99^2+100^2)$$

هذا يعني 1 زائد 33 تعبير من الصورة $(a-1)^2-2a^2+(a+1)^2$

لكن:

$$(a-1)^2-2a^2+(a+1)^2=a^2-2a+1-2a^2+a^2+2a+1=2$$

هذا يعني أنَّ التعبير الأصلي يساوي 1 زائد 33 تعبير قيمة كل واحد تساوي 2، لذلك $2\cdot33+1=67$.

مسابقة الأولمبياد القطرية في الرياضيات للصّفوف: تاسع

حلول - المرحلة أ، سنة 2021

سؤال 5.

مُعطاة المعادلة: $x^2 + 2xy + y^2 - 200x - 200y + 1900 = 0$. كَم حلا (x, y) يوجد للمعادلة، إذا عُلِم أنَّ x وَ y هما عددين صحيحين بين1 وَ 100 (يشمل)؟

الجواب. 20

الحلّ.

المعادلة المُعطاة تُعادل المعادلة التالية:

$$(x + y)^2 - 200 \cdot (x + y) + 1900 = 0$$

نرفع الطرفين للقوة الثانية (تربيع):

$$(x + y)^2 - 2 \cdot 100 \cdot (x + y) + 100^2 = 100^2 - 1900$$

$$(x + y - 100)^2 = 8100$$

هذا يعني $x + y - 100 = 90$ أو $100 - x - y = 90$, هذا يعني $x + y = 190$ أو $x + y = 10$.

لنتذكر المُعطى $1 \leq x, y \leq 100$. في المعادلة $x + y = 10$ قيمة x يمكن أن تكون كل عدد صحيح بين 1 إلى 9 (يشمل الأطراف)، ولذلك لكل إمكانية كهذه توجد قيمة وحيدة لِ y ملائمة. في هذه الحالة توجد 9 إمكانيات.

في المعادلة $x + y = 190$ قيمة x يمكن أنْ تكون كل عدد صحيح من 90 وحتى 100 (يشمل)، لذلك في هذه الحالة توجد 11 إمكانية.

بالإجمال يوجد 20 حلاً للمعادلة الأصلية.

سؤال 6.

مع مريم 8 بطاقات كُتبت عليها أعداد ثُلاثيَّة المنازل ومتتالية. رقم آحاد أصغر عدد هو 1، رقم آحاد أكبر عدد هو 8. رتّبت مريم البطاقات بسطر بحث أنَّ العدد الأول يقبل القسمة على 2، العدد الثاني يقبل القسمة على 3، العدد الثالث يقبل القسمة على 4، وهكذا حتى العدد الثامن والذي يقبل القسمة على 9. ما هو رقم آحاد العدد الذي يقبل القسمة على 7؟

الجواب. 3

الحلّ.

توجد 8 أعداد متتالية رقم آحادها 1,2,3,4,5,6,7,8. الأعداد التي تقبل القسمة على 2,4,6,8 يجب أن يكون رقم آحادها زوجيا. العدد الذي يقبل القسمة على 5 يجب أن يكون رقم آحاده 5. بقي لدينا عددا يقبل القسمة على 3، عددا يقبل القسمة على 9 وعددا يقبل القسمة على 7. تنتهي هذه الأعداد بالأرقام 1,3,7. البُعد بين العدد الذي يقبل القسمة على 3 والعدد الذي يقبل القسمة على 9 يجب أن يقبل القسمة على 3، لذلك، هذان العددان ينتهيان بِ 1,7. لذلك العدد الذي يقبل القسمة على 7 ينتهي بالرقم 3 (رقم آحاده 3).