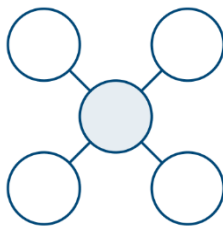
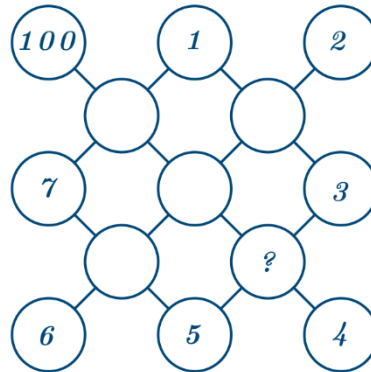




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט
שלב א, שנת תשפ"א

שאלה 1.

נתבונן בתרשים הבא:



כל מספר בתרשים, שמחובר ל-4 מספרים אחרים, חייב להיות שווה לממוצע שלהם: מהו המספר בעיגול שמסומן בסימן שאלה?

תשובה 6.

פתרון.

קודם כל נחשב את המספר שבמרכז הריבוע. אם נדע אותו, נוכל לחשב את כל שאר המספרים, כולל את המספר המסומן ב-"?".

נסמן את המספר בעיגול המרכזי ב- x , ומספרים בעיגולים הסמוכים לו ב- a, b, c, d .

לפי הנתונים $4x = a + b + c + d$, אבל מצד שני:

$$4a + 4b + 4c + 4d = (1 + 2 + 3 + x) + (3 + 4 + 5 + x) + (5 + 6 + 7 + x) + (7 + 100 + 1 + x)$$

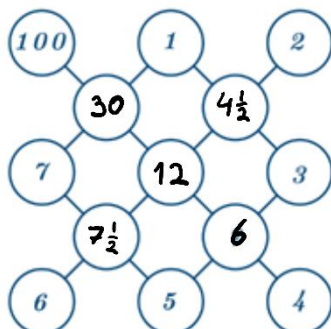
$$16x = 4x + 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7 + 7 + 100 + 1$$

$$12x = 44 + 100 = 144$$

$$x = 12$$

$$? = \frac{12+3+4+5}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ ולכן}$$

אפשר גם למצוא את שאר המספרים ולוודא שזה אכן תשובה נכונה:

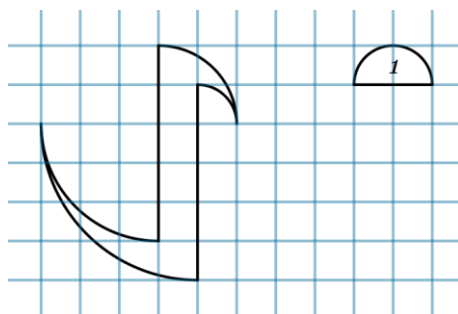




האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט שלב א, שנת תשפ"א

שאלה 2.

בתמונה, שטח של חצי העיגול שווה ל-1. מצאו את השטח של הצורה הגדולה, אם ידוע, שכל הקווים העקומים בתמונה הם רבעי מעגלים.



תשובה 5.

פתרון.

נשים לב ששטח של רבע עיגול אם רדיוס של צלע משבצת אחת הוא $\frac{1}{2}$, ולכן שטח של רבע עיגול עם רדיוס a פעמים צלע של משבצת הוא $\frac{1}{2} \cdot a^2$.

אם נעביר קטע אופקי ישר מקצה הימני לקצה השמאלי של הצורה (כמו בצור), נראה שהצורה מתחלקת לשני חלקים. חלק עליון הוא רבע עיגול ברדיוס 2 משבצות שהורידו ממנו רבע עיגול ברדיוס של משבצת אחת, וחלק תחתון הוא רבע עיגול ברדיוס של 4 משבצות שהורידו ממנו רבי עיגול ברדיוס של 3 משבצות. בסה"כ השטח יוצא:

$$\frac{4^2}{2} - \frac{3^2}{2} + \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{16 - 9 + 4 - 1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

שאלה 3.

כעבור כמה דקות אחרי השעה 7:00 הזווית בין מחוג השעות למחוג הדקות תהיה מעלה אחת לראשונה? הערה: מחוגי השעון זזים ברציפות ובמהירות קבועה.

תשובה 38.

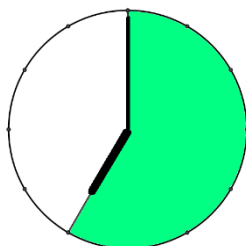
פתרון.

בשעה 7:00 הזווית בין המחוגים שווה ל- 150° . בגלל שמחוג הדקות מהיר יותר, הזווית שמעניינת אותנו היא בעצם הזווית הנישאה של 210° . כדי שהזווית בין המחוגים תהיה מעלה 1° לראשונה, מחוג הדקות צריך "כמעט להשיג" את מוג השעות, וסך הכל המחוגים צריכים לסגור פער של 209° .

מחוג שעות מתקדם במהירות של 30° לשעה, ומחוג הדקות מתקדם במהירות של 360° לשעה. לכן המהירות בה מחוג הדקות "משיג" את מחוג השעות היא 330° לשעה. עלינו לסגור 209° , לכן יעברו

$$\frac{209}{330} = \frac{19}{30} = \frac{38}{60}$$

של שעה, כלומר 38 דקות.





האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט שלב א, שנת תשפ"א

שאלה 4

איילה לקחה את כל המספרים שמתחלקים ב-3 מ-1 עד 99 כולל והעלתה את כל אחד מהם בריבוע, סכמה את התוצאות, ואת המספר שהתקבל הכפילה פי 2. ברווז לקח את כל המספרים שלא מתחלקים ב-3 מ-1 עד 100 כולל, העלה את כל אחד מהם בריבוע וסכם את התוצאות. מה ההפרש בין המספר שברווז קיבל למספר שאיילה קיבלה?

תשובה 67

פתרון

צריך לחשב את הערך של הביטוי הבא:

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 100^2 - 2 \cdot (3^2 + 6^2 + 9^2 + \dots + 99^2)$$

נקבץ את המספרים בצורה הבאה:

$$1^2 + (2^2 - 2 \cdot 3^2 + 4^2) + (5^2 - 2 \cdot 6^2 + 7^2) + \dots + (98^2 - 2 \cdot 99^2 + 100^2)$$

$$\text{כלומר } 1 \text{ פלוס } 33 \text{ ביטויים מהצורה } (a-1)^2 - 2a^2 + (a+1)^2$$

אבל:

$$(a-1)^2 - 2a^2 + (a+1)^2 = a^2 - 2a + 1 - 2a^2 + a^2 + 2a + 1 = 2$$

כלומר הביטוי המקורי שווה ל-1 פלוס 33 ביטויים שכולם שווים ל-2, כלומר $2 \cdot 33 + 1 = 67$.

שאלה 5

נתונה משוואה: $x^2 + 2xy + y^2 - 200x - 200y + 1900 = 0$. כמה פתרונות (x, y) יש למשוואה, כאשר x ו- y הם מספרים שלמים מ-1 עד 100 (כולל)?

תשובה 20

פתרון

המשוואה שקולה למשוואה הבאה:

$$(x+y)^2 - 200 \cdot (x+y) + 1900 = 0$$

נשלים לריבוע:

$$(x+y)^2 - 2 \cdot 100 \cdot (x+y) + 100^2 = 100^2 - 1900$$

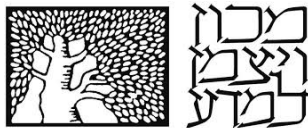
$$(x+y-100)^2 = 8100$$

כלומר $x+y-100 = 90$ או $x+y-100 = -90$, כלומר $x+y = 190$ או $x+y = 10$.

נזכיר שנתון $1 \leq x, y \leq 100$. במשוואה $x+y = 10$ הערך של x יכול להיות כל מספר שלם מ-1 עד 9 כולל, ולכל אפשרות כזאת יש y יחיד שמתאים. כלומר במקרה הזה יש 9 אפשרויות.

במשוואה $x+y = 190$ הערך של x יכול להיות כל מספר שלם מ-90 עד 100 כולל, לכן במקרה הזה יש 11 אפשרויות.

סה"כ זה נותן לנו 20 פתרונות למשוואה המקורית.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ט שלב א, שנת תשפ"א

שאלה 6.

למרים יש שמונה כרטיסים עם מספרים תלת ספרתיים עוקבים. ספרת היחידות של המספר הקטן ביותר היא 1, ספרת היחידות של המספר הגדול ביותר היא 8. מרים סדרה את הכרטיסים בשורה כך שהמספר הראשון מתחלק ב-2, המספר השני מתחלק ב-3, המספר השלישי מתחלק ב-4, וכן הלאה עד המספר השמיני שמתחלק ב-9. מהי ספרת היחידות של המספר שמתחלק ב-7?

תשובה 3.

פתרון.

יש 8 מספרים עוקבים שנגמרים ב-1,2,3,4,5,6,7,8. אלא שמתחלקים ב-2,4,6,8 חייבים להסתיים בספרות זוגיות. המספר שמתחלק ב-5 חייב להסתיים ב-5. נשארו לנו מספר שמתחלק ב-3, מספר שמתחלק ב-9, ומספר שמתחלק ב-7. המספרים האלה נגמרים בספרות 1,3,7. המרחק בין מספר שמתחלק ב-3 ומספר שמתחלק ב-9 חייב להתחלק ב-3, לכן זה המספרים שנגמרים ב-1,7. לכן המספר שמתחלק ב-7 נגמק ב-3.