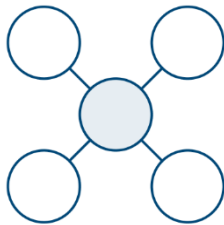
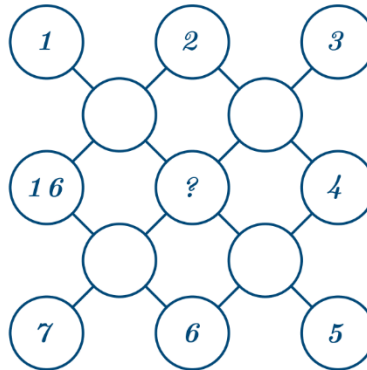




## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח שלב א, שנת תשפ"א

### שאלה 1.

נתבונן בתרשים הבא:



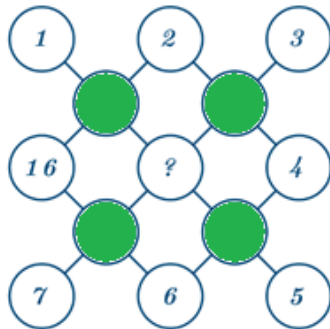
כל מספר בתרשים, שמחובר ל-4 מספרים אחרים, חייב להיות שווה למוצע שלהם:

מהו המספר בעיגול שמימין בסימן שאלה?

### תשובה 6.

### פתרון:

להגיד שמספר שווה למוצע של 4 אחרים שקול ללהגיד שהמספר כפול 4 שווה לסכום של 4 אחרים.



נסתכל על המקומות המסומנים בירוק (4 עיגולים שסמוכים לעיגול המרכזי).  
4 כפול סכום של המספרים האלה שווה ל-16 פעמים המספר האמצעי. מצד  
שני, 4 כפול מספר בעיגול ירוק שווה לסכום המספרים שמסביבו. לכן 4 פעמים  
סכום כל המספרים הירוקים שווה ל:

$$(1 + 2 + ? + 16) + (2 + 3 + 4 + ?) + (? + 4 + 5 + 6) + (? + 6 + 7 + 16)$$

כלומר קיבלנו כי:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 2 \cdot (2 + 4 + 6 + 16) + 4 \cdot ? = 16 \cdot ?$$

מכאן:

$$72 = 12 \cdot ?$$

$$? = 6$$



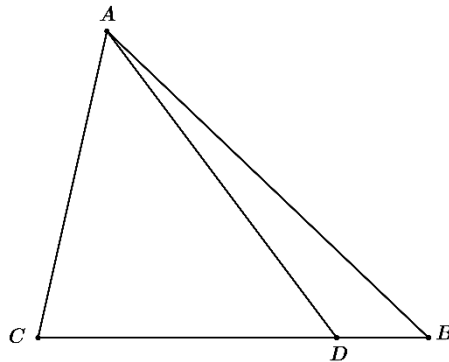
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לביתות ז-ח  
 שלב א, שנת תשפ"א

**שאלה 2.**

על הצלע  $BC$  של משולש  $ABC$  מסמנים נקודה  $D$ . היקף המשולש  $ABC$  שווה 15 סנטימטרים, היקף המשולש  $ABD$  – 12 סנטימטרים, היקף המשולש  $ACD$  – 13 סנטימטרים. מהו אורך הקטע  $AD$ ?

**תשובה 5.**

**פתרון.**



$$\begin{array}{r} \cancel{AB} + BD + \cancel{DA} = 13 \\ + \cancel{AC} + \cancel{CD} + DA = 12 \\ - \cancel{AB} + \cancel{AC} + CA = 15 \\ \hline 2AD = 10 \end{array}$$

מכאן,  $AD = 5$ .

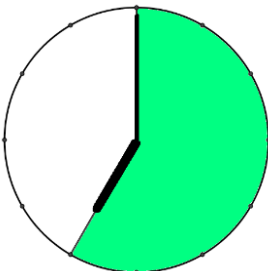
**שאלה 3.**

כעבור כמה דקות אחרי השעה 7:00 הזווית בין מחוג השעות למחוג הדקות תהיה מעלה אחת לראשונה? הערה: מחוגי השעון זזים ברציפות ובמהירות קבועה.

**תשובה 38.**

**פתרון.**

בשעה 7:00 הזווית בין המחוגים שווה ל- $150^\circ$ . בגלל שמחוג הדקות מהיר יותר, הזווית שמעניינת אותנו היא בעצם הזווית הנישאה של  $210^\circ$ . כדי שהזווית בין המחוגים תהיה מעלה  $1^\circ$  לראשונה, מחוג הדקות צריך "כמעט להשיג" את מוג השעות, וסך הכל המחוגים צריכים לסגור פער של  $209^\circ$ .



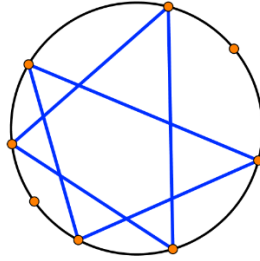
מחוג שעות מתקדם במהירות של  $30^\circ$  לשעה, ומחוג הדקות מתקדם במהירות של  $360^\circ$  לשעה. לכן המהירות בה מחוג הדקות "משיג" את מחוג השעות היא  $330^\circ$  לשעה. עלינו לסגור  $209^\circ$ , לכן יעברו  $\frac{209}{330} = \frac{19}{30} = \frac{38}{60}$  של שעה, כלומר 38 דקות.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לביתות ז-ח שלב א, שנת תשפ"א

### שאלה 4.

על מעגל נתונות 8 נקודות. בכמה דרכים שונות אפשר לצייר מגן דוד עם קודקודים בנקודות האלה?



הערה: מגן דוד הינה צורה כשמתקבלת כאשר שני משולשים נחתכים וצלעותיהם יוצרות בדיוק 6 נקודות חיתוך.

### תשובה 28.

#### פתרון.

נשים לב, שלכל שישייה של נקודות על מעגל, יש דרך אחת בדיוק להרכיב מהן מגן דוד. לכן, השאלה שקולה לשאלה על מספר דרכים לבחור 6 נקודות מתוך 8.

לבחור 6 נקודות מתוך 8 נקודות זה אותו דבר כמו לבחור 2 נקודות מתוך ה-8 ולמחוק אותן, כך שיישאר 6. לנקודה הראשונה מבין השתיים יש 8 אפשרויות (היא יכולה להיות כל אחת משמונה הנקודות על המעגל), לנקודה השנייה יש 7 אפשרויות. נשים לב גם שאם נספור את זוגות הנקודות באופן כזה, כל זוג ייספר פעמיים, כי זה לא משנה מהי

הנקודה הראשונה ומהי הנקודה השנייה. לכן מספר הדרכים לבחור 2 נקודות שאנחנו נרצה למחוק הוא  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ .

### שאלה 5.

יוסי רשם על הלוח 10 מספרים טבעיים עוקבים. דני מחק אחד מהמספרים. סכום המספרים שנשארו על הלוח שווה ל-2020. איזה מספר נמחק?

### תשובה 225.

#### פתרון.

נכת על הלוח 9 מספרים עוקבים או "כמעט עוקבים": אם המספר שנמחק, עמד באחד הקצוות, אז יישאר 9 מספרים עוקבים, אחרת תישאר "קפיצה" ב-2 בין שני מספרים כלשהם (וכל השאר יהיו עוקבים).

נשים לב שסכום של 9 מספרים עוקבים שווה ל-9 פעמים המספר האמצעי (החמישי). לכן, סכום של 9 מספרים עוקבים חייב להתחלק ב-9. 2020 לא מתחלק ב-9, לכן 9 המספרים שנשארו על הלוח לא עוקבים, וחייבת להיות פה "קפיצה" איפה שהוא.

במקרה זה אנחנו יכולים לחשוב על 9 המספרים שיש עכשיו על הלוח כעל 9 מספרים עוקבים, שהחל ממקום מסוים (אותו המקום איפה שיש את הקפיצה) הוסיפו לכל המספרים 1. לכן, סכום של 9 המספרים האלה שווה לסכום של 9 מספרים עוקבים ועוד מספר שהוא כמות המספרים אחרי הקפיצה.  $2020 = 224 \cdot 9 + 4$ , לכן הוספנו 1 ל-4 מספרים, והמספר שחסר זה המספר השישי ברשימה מתוך ה-10, והמספר החמישי הוא 224. לכן המספר שנמחק הוא 224.



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ז-ח שלב א, שנת תשפ"א

### שאלה 6.

לאורך הרחוב ממוקמים 15 בתים, בצבע אדום, כחול וירוק. יש לפחות בית אחד מכל צבע. בין כל שני בתים כחולים יש בית אדום. בין כל שני בתים ירוקים יש בית כחול. מהו המספר הגדול ביותר של בתים ירוקים שיכול להיות? הערה: הרחוב ישר, כל הבתים ממוקמים בצד אחד של הרחוב.

### תשובה 6.

#### פתרון.

אם יש  $x$  בתים ירוקים אז יש לפחות  $x - 1$  בתים כחולים בינם, ובינם יש לפחות  $x - 2$  בתים אדומים. לכן בסה"כ יש לפחות  $3 \cdot x - 3$  בתים. כלומר:  $3 \cdot x - 3 \leq 15$ , ולכן  $x \leq 6$ .

הנה דוגמה בה יש 6 בתים ירוקים

