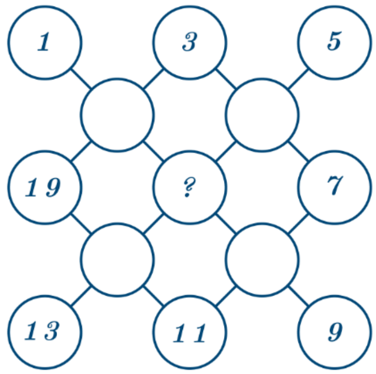
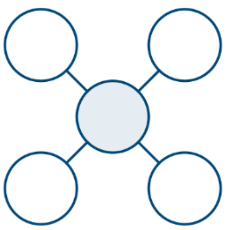
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו
שלב א, שנת תשפ"א

שאלה 1.

נתבונן בתרשים הבא:





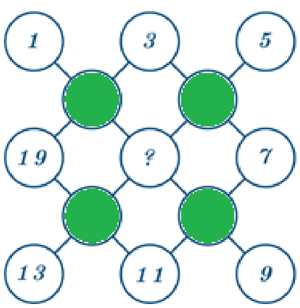
כל מספר בתרשים, שמחובר ל-4 מספרים אחרים, חייב להיות שווה *לממוצע* שלהם:

מהו המספר בעיגול שמסומן בסימן שאלה?

הערה: ממוצע של ארבעה מספרים זה הסכום שלהם חלקי 4.

תשובה: 9

פתרון:



להגיד שמספר שווה ל**ממוצע** של 4 אחרים שקול ללהגיד שהמספר כפול 4 שווה ל**סכום** של 4 אחרים.

נסתכל על המקומות המסומנים בירוק (4 עיגולים שסמוכים לעיגול המרכזי). 4 כפול סכום של המספרים האלה שווה ל16 פעמים המספר האמצעי. מצד שני, 4 כפול מספר בעיגול ירוק שווה לסכום המספרים שמסביבו. לכן 4 פעמים סכום כל המספרים הירוקים שווה ל:

$$(1 + 3 + ? + 19) + (3 + 5 + 7 + ?) + (? + 7 + 9 + 11) + (? + 11 + 13 + 19)$$

כלומר קיבלנו כי:

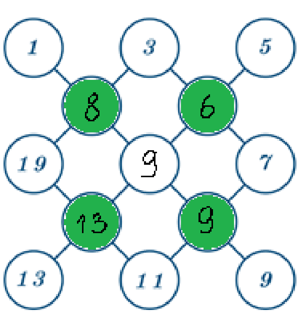
$$1 + 5 + 9 + 13 + 2 \cdot (3 + 7 + 11 + 19) + 4 \cdot ? = 16 \cdot ?$$

מכאן:

$$108 = 12 \cdot ?$$

$$? = 9$$

מכאן גם יחסית קל לקבל את שאר המספרים. כך נוודא שהתשובה שקיבלנו – נכונה:



<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב א, שנת תשפ"א

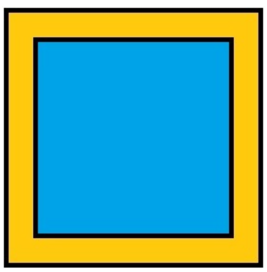
<u>שאלה 2.</u>

13 דוברי אמת ו-12 שקרנים השתתפו בסקר. במסגרת הסקר, כל אחד נשאל לגבי כל אחד (כולל עצמו), האם הוא דובר אמת. כמה תשובות "כן" התקבלו בסקר בסך הכל?

<u>תשובה.</u> 313

<u>פתרון.</u>

כל דובר אמת ענה "כן" כששאלו אותו על דוברי אמת, וענה "לא" כששאלו אותו על שקרנים. לכן, סך הכל דוברי האמת ענו "כן" $13 \times 13 = 169$ פעמים. כל שקרן ענה "כן" כששאלו אותו על שקרנים, וענה "לא" כששאלו אותו על דוברי אמת. לכן, סך הכל השקרנים ענו כן $12 \times 12 = 144$ פעמים. לכן, ביחד הם ענו "כן" $169 + 144 = 313$ פעמים.



<u>שאלה 3.</u>

בציור מסביב לריבוע הכחול יש שביל כתום; השטח של השביל הוא 44% מהשטח של הריבוע. מהו העובי של השביל הכתום באחוזים יחסית לצלע של הריבוע הכחול?

<u>תשובה.</u> 10%

<u>פתרון.</u>

השביל הוא 44% משטח הריבוע, כלומר הריבוע עם השביל הוא 144% משטח הריבוע. כלומר יחס בין שטח ריבוע גדול לשטח ריבוע קטן הוא $\frac{144}{100}$. שטח ריבוע שווה לאורך צלע בריבוע, לכן יחס בין תצלעות הוא $\frac{12}{10}$, כלומר 120%. צלע הריבוע הגדול שווה לצלע הריבוע הקטן פלוס פעמיים רוחב השביל, כלומר $100\% + 2 \cdot 10\%$.
לכן רוחה השביל הוא 10% מצלע ריבוע כחול.

<u>שאלה 4.</u>

יוסי רושם על הלוח מספרים דו ספרתיים *פריקים* (לא ראשוניים). הוא רוצה שכל המספרים הכתובים על הלוח יהיו *זרים* זה לזה. כמה מספרים יוסי יוכל לכתוב על הלוח לכל היותר?
הערה: מספרים נקראים זרים, אם אין להם גורמים משותפים חוץ מהמספר 1.

<u>תשובה.</u> 4

<u>פתרון.</u>

דוגמה ל-4 מספרים: 16, 27, 25, 49.

נראה כי לא ניתן לרשום יותר מ-4 מספרים. נתבונן בפירוק של המספרים הרשומים על הלוח לגורמים ראשוניים. לכל אחד יש לפחות שני גורמים ראשוניים (לא בהכרח שונים זה מזה), כי המספר פריק. בנוסף, לא יכולים להיות גורמים משותפים למספרים שונים, כי כל המספרים על הלוח זרים זה לזה.

נשים לב שלא ייתכן שיהיו למספר דו ספרתי שני מחלקים ראשוניים דו ספרתיים, כי 11×11 כבר תלת ספרתי. לכן, לכל מספר שרשום על הלוח חייב להיות מחלק ראשוני חד ספרתי. יש רק ארבעה מספרים ראשוניים חד ספרתיים: 2, 3, 5, 7, לכן לא ניתן לרשום על הלוח יותר מ-4 מספרים זרים.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב א, שנת תשפ"א

<u>שאלה 5.</u>

לאורך הרחוב ממוקמים 15 בתים, בצבע אדום, כחול וירוק. יש לפחות בית אחד מכל צבע. בין כל שני בתים כחולים יש בית אדום. בין כל שני בתים ירוקים יש בית כחול. מהו המספר הגדול ביותר של בתים ירוקים שיכול להיות?

הערה: הרחוב ישר, כל הבתים ממוקמים בצד אחד של הרחוב.

<u>תשובה.</u> 6

<u>פתרון.</u>

אם יש x בתים ירוקים אז יש לפחות $x-1$ בתים כחולים בינם, ובינם יש לפחות $x-2$ בתים אדומים. לכן בסה"כ יש לפחות $3\cdot x-3$ בתים. כלומר: $3\cdot x-3\le 15$, ולכן $x\le 6$.

הנה דוגמה בה יש 6 בתים ירוקים:

<u>שאלה 6.</u>

נקרא לשבר *קסום*, אם מונה ומכנה שלו קטנים מ-10. למשל, השבר $\frac{1}{9}$ קסום, השבר $\frac{6}{8}$ קסום, השבר $\frac{3}{14}$ לא קסום. כמה שברים קסומים יש, שגדולים מחצי וקטנים מ-1?

<u>תשובה.</u> 16

<u>פתרון.</u>

נספור לפי מכנה.

מכנה	3	4	5	6	7	8	9
מונה	2	3	3,4	4,5	4,5,6	5,6,7	5,6,7,8
כמות	1	1	2	2	3	3	4

סה"כ קיבלנו שקיימים 16 שברים.

הערה: אפשר בצורה דומה למצוא כמות שברים מצומצמים, 3 מתוך השברים שרשמנו לא מתאימים, אז יוצא 13 שברים.