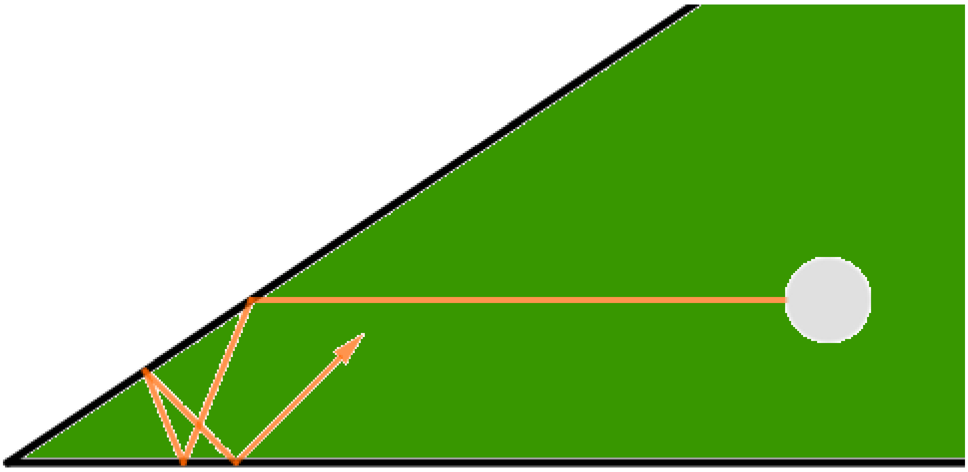
ביליארדים

1. מהו ההיקף המינימלי של מרובע שכל קודקוד שלו נמצא על צלע שונה של מלבן שצלעותיו a, b.

2. הזווית בין שני קירות היא 10 מעלות. כדור ביליארד שנע במקביל לאחת הקירות מתנגש בקיר השני, מוחזר ומתנקש עוד מספר פעמים בקירות, עד שהוא יוצא מהפינה. כמה התנגשויות בסה"כ מתרחשות?



3. נתון מלבן 102 על 100, משגרים כדור מפינת המלבן בזווית 45 מעלות, איזה מרחק הוא יעבור וכמה פעמים הוא יפגע בקירות עד שיפגע בפינה?

4. נתון מלבן 80 על 57, משגרים כדור מפינת המלבן בזווית 45 מעלות, איזה מרחק הוא יעבור וכמה פעמים הוא יפגע בקירות עד שיפגע בפינה?

5. במשולש משוכלל עם קירות מראה חיזר יורה קרן לייזר במקביל לאחת הקירות. אורך של כל קיר שווה ל-10 מטרים.
   א. הוכיחו כי הקרן תפגע בו (אחרי מספר השתקפויות).
   ב. מהו המרחק המקסימלי שקרן יכולה לעבור?

6. נתון משולש ישר זווית לא שווה שוקיים, ונקודה על היתר. מצאו מסלול קצר ביותר שמתחיל בנקודה, עובר ב2 הניצבים וחוזר ליתר (לא בהכרח לאותה הנקודה).

7. נתון שולחן ביליארד בעל צורה של משולש שזוויותיו הם $90°, 60°, 30°$. מהפינה בת השלושים מעלות שולחים כדור אל אמצע הצלע הנגדית של המשולש (בכיוון התיכון). הוכיחו, כי אם הכדור לא יעצור – הוא יגיע לפינה של $60°$. (כשכדור פוגע בקיר – זווית ההחזרה שווה לזווית הפגיעה).

בתאבון!

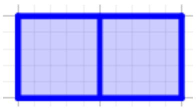
בסוגיה זו נגזור צורות ונרכיב מהן צורות אחרות. מותר לנו לחלק את הצורה הנתונה למספר חלקים, את כל אחד מהחלקים ניתן להזיז לסובב ולשקף ובסוף צריך להרכיב את הצורה השנייה אליה רצינו להגיעה.

לפעמים נתעניין גם בכמות החלקים המינימלית אליהם צריך לחלק צורה מסוימת בשביל לקבל צורה אחרת.

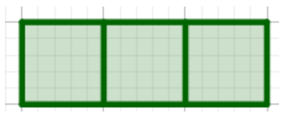
<u>פרק ראשון, דוגמאות קונקרטיות</u>

1. הרכיבו ריבועים מהצורות הבאות:

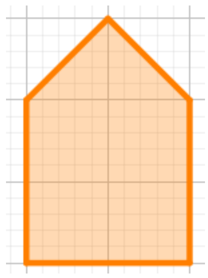
א.



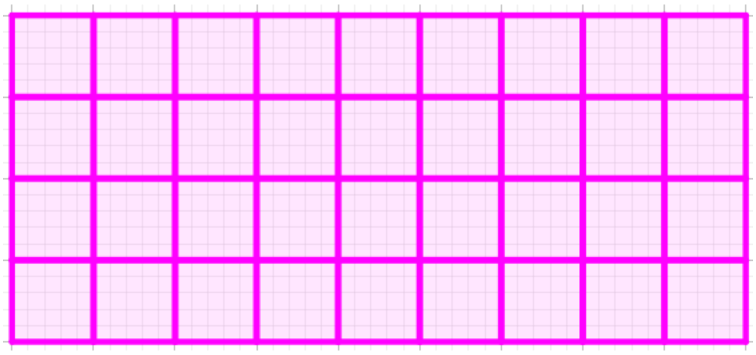
ב.



ג.



ד.



בכל אחד מהסעיפים נסו להשתמש בשלושה חלקים בלבד.

2. הרכיבו משולש שווה צלעות מ3 משולשים שווי צלעות עם צלע 1.

3. הרכיבו משולש שווה צלעות ממגן דוד ע"י כמה שפחות חלקים.

בתאבון!

פרק שני, צורות כלליות

מטרת פרק זה היא לפתור את השאלה: נתונים שני מצולעים במישור האם בהכרח ניתן לחתוך את הראשון ולהרכיב ממנו את השני?

שימו לב שאם לשני המצולעים לא אותו השטח אז לא ניתן להרכיב את האחד מהשני.

מעכשיו נניח שלשני המצולעים שלנו שטח זהה.

1. נתון משולש במישור. א. הרכיבו ממנו מקבילית כלשהי. ב. הרכיבו ממנו מלבן כלשהו.

2. הוכיחו כי כל מצולע, לא בהכרח קמור, אפשר לחתוך למשולשים.

3. הוכיחו כי מכל מלבן אפשר להרכיב כל מלבן אחר.

4. א. הוכיחו כי מכל מקבילית אפשר לקבל כל מקבילית אחרת עם אותו גובה ובסיס.

ב. הוכיחו כי מכל מקבילית אפשר לקבל כל מקבילית אחרת עם אותו שטח על ידי פעולות חיתוך והרכבה.

5. א. נתון אוסף מלבנים. הרכיבו ממנו מלבן אחד.

ב. נתון אוסף מקביליות. הרכיבו ממנו מקבילית אחת.

6. הוכיחו כי אם אפשר להרכיב מצולע B ממצולע A ומצולע C ממצולע B אז אפשר להרכיב מצולע C ממצולע A.

7. פתרו את השאלה בתחילת הפרק, הוכיחו כי עבור כל שני מצולעים עם שטח זהה ניתן להרכיב את הראשון מהשני.

פרק שלישי, חיתוכים עם מעט חלקים

השתמשו בכמות המינימלית של חלקים בשביל להרכיב:

1. ריבוע ממשולש משוכל.

2. ריבוע ממחומש משוכלל.

3. מחומש משוכלל ממשולש משוכלל.

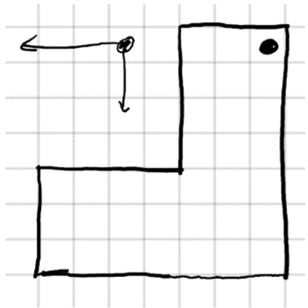
(אין צורך להוכיח מינימליות)

בתאבון!

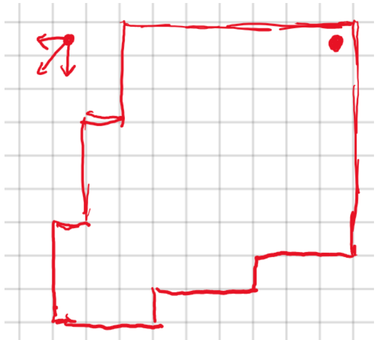
משחקים

בשאלות הבאות נתון משחק, בכל שאלה – משחק שונה. במשחק משחקים 2 שחק**נים** בתורות. אם לאחד השחק**נים** אין מהלך חוקי – הוא מפסיד. המטרה בכל שאלה – למצוא את האסטרטגיה המנצחת לאחד השחק**נים**, ולהבין מי מנצח.

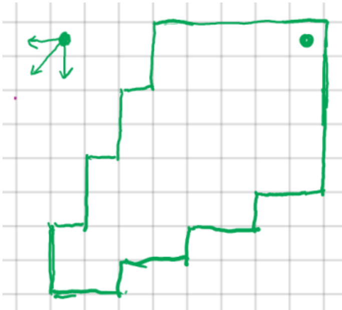
1. נתון לוח משבצות כמתואר בציור (ריבוע 7 על 7 בלי ריבוע 4 על 4 שמאל עליון). בפינה ימנית עליונה מונחת אבן. בכל מהלך מותר להזיז את האבן שמאלה או למטה על הלוח, כל כמות של משבצות.



2. נתון לוח משבצות כמתואר בציור. בפינה ימנית עליונה מונחת אבן. בכל מהלך מותר להזיז את האבן למשבצת סמוכה שמאלה, למטה או באלכסון.

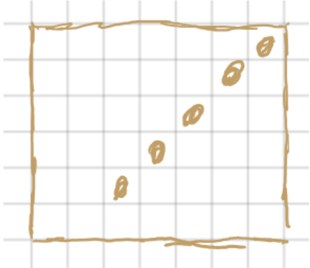


3. נתון לוח משבצות כמתואר בציור. בפינה ימנית עליונה מונחת אבן. בכל מהלך מותר להזיז את האבן למשבצת סמוכה שמאלה, למטה או באלכסון. (כלומר אותה שאלה אבל הלוח אחר)



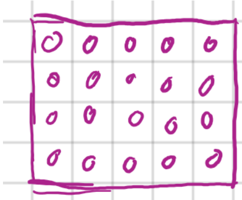
4. נתונות 4 ערימות אב**נים**, בגדלים 100 אב**נים** כל אחת . בכל מהלך מותר לבחור ערימה או שתי ערימות או שלוש ערימות ולהוריד מהן כמה אב**נים** שהשחקן רוצה (לא בהכרח כמות שווה). כמובן המשחק מסתיים כאשר כל הערימות ריקות, ומי שאין לו מהלך במצב כזה – מפסיד.

5. במלבן בגודל 7 על 6 משבצות מונחות אב**נים** כמו בציור. בכל מהלך מותר להזיז את אחד האב**נים** שמאלה או למטה (האבן, הכיוון והמרחק - לבחירת השחקן). מותר לשים כמה אב**נים** באותה משבצת, מותר לעבור מעל אב**נים** אחרים.

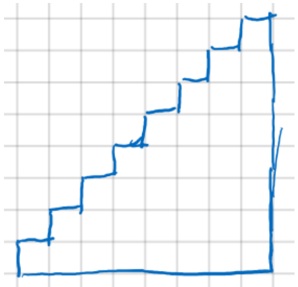


6. נתונות 2 ערימות אב**נים**, בגדלים 8 אב**נים** כל אחת . בכל מהלך מותר לבחור ערימה ולהוריד ממנה אבן או לבחור שתי ערימות ולהוריד מהן אבן אחת מכל אחת. אסור לגרום למצב שבו באחת הערימות יש יותר מפי 2 אב**נים** מאשר בערימה האחרת. אסור גם להגיע לאפס אב**נים** בשתי הערימות.

7. בכל משבצת של מלבן 5 על 4 מונחת אבן, כמו בציור. בכל מהלך מותר להזיז את אחד האב**נים** שמאלה או למטה (האבן, הכיוון והמרחק - לבחירת השחקן). מותר לשים כמה אב**נים** באותה משבצת, מותר לעבור מעל אב**נים** אחרים. (כלומר כמו שאלה קודמת, אבל עם לוח אחר)



8. נתון לוח בצורת "משולש" שמורכב ממשבצות, כמו בציור. על הלוח מניחים 2 כלים, ומשחקים כמו במשחק משאלה הקודמת - בכל מהלך מותר להזיז את אחד האב**נים** שמאלה או למטה (האבן, הכיוון והמרחק - לבחירת השחקן). מותר לשים כמה אב**נים** באותה משבצת, מותר לעבור מעל אב**נים** אחרים. לאילו מצבים התחלתיים של 2 האב**נים** לשחקן הראשון יש אסטרטגיית ניצחון, ולאילו מצבים – לשחקן השני?



בתאבון!

שלשות פיתגוריות

שלשה פיתגורית היא שלישיית מספרים **טבעיים** x,y,z , המקיימים $x^2+y^2=z^2$.

שלשה פיתגורית x,y,z נקראת פרימיטיבית אם המספרים x,y,z זרים.

משולש פיתגורי הוא משולש ישר זוויות בו לכל הצלעות – אורך שלם.

1. הראו שלכל m,n טבעיים שונים המספר $2(m^4+n^4)$ לא יכול להיות ריבוע שלם.
2. הראו שלכל m,n טבעיים שונים המספר $m^4+6m^2n^2+n^4$ לא יכול להיות ריבוע שלם.
3. מצאו את כל המשולשים הפיתגוריים בהם שטח שווה להיקף.
4. מצאו סדרה עולה אינסופית $a_1,\dots,a_n,\dots$ כך שבה $a_n^2+a_{n+1}^2$ ריבוע שלם לכל n טבעי.
5. הוכיחו כי אין משולש פיתגורי בו שטח הוא ריבוע שלם.
6. הוכיחו כי למשוואה $x^2y^2=z^2(z^2-x^2-y^2)$ אין פתרון בטבעיים.

טבלת שלשות פיתגוריות פרימיטיביות ראשונות:

m	n	**x**	**y**	**z**
2	1	**3**	**4**	**5**
3	2	**5**	**12**	**13**
4	1	**15**	**8**	**17**
4	3	**7**	**24**	**25**
5	2	**21**	**20**	**29**
5	4	**9**	**40**	**41**

בתאבון!

שברים מצריים

מבוא

בראשית אנשים הכירו רק מספרים שלמים. אז נולד הצורך לחלק דברים שווה בשווה, והומצאו שברים מצריים.
כך למשל, אם מישהו מקבל שכר של $\frac{5}{6}$ לחם, אז עדיף שיקבל שליש לחם וחצי לחם, הרי אם נחתוך את הלחמים לשישיות אז חלק ניכר מהלחם יתבזבז על פירורים.
בשביל זה נגדיר **שברים יסודיים:** שבר יסודי הוא שבר פשוט עם מונה שווה ל-1, כלומר מהצורה $\frac{1}{n}$.

מסתבר, שכל שבר חיובי ניתן להציג כסכום של שברים יסודיים שונים. **הצגה כזאת של מספרים שברים נקראת שברים מצריים** (או סכומים מצריים). לדוגמה: $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ או $\frac{1}{11}+\frac{1}{10}$

אורך של שבר מצרי הוא כמות השברים היסודיים. למשל $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ הוא שבר מצרי באורך 2, ו-$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ הוא שבר מצרי באורך 3. (למרות שהערך המספרי שלהם שווה)

שאלה 1:

לאילו n-ים טבעיים ניתן להציג את המספר 1 כסכום של n שברים יסודיים שונים. (כלומר כשבר מצרי באורך n)

שאלה 2: מהו האורך הקצר ביותר של הצגה של $\frac{7}{30}$ כשבר מצרי?

שאלה 3: הציגו את $\frac{10}{17}$ בצורה של $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. האם יתכן ש-$a<b<c<40$?

שיטות להרכבת שברים מצריים.

בהמשך נציג כמה שיטות שהופכות שבר רגיל $\frac{a}{b}$ לשבר מצרי $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$.

שיטות חמדניות

בשלוש שיטות הבאות אנחנו נתחיל משבר $\frac{a}{b}$, ובכל שלב של התהליך נבחר שבר יסודי $\frac{1}{k}$ ונחסיר אותו מהשבר $\frac{a}{b}$. כך נקבל שבר חדש $\frac{c}{d}$ שאיתו נמשיך בתהליך. אם התהליך יסתיים ובסוף נקבל אפס – השבר המקורי יהיה ניתן להצגה כסכום של השברים היסודיים שהחסרנו בתהליך.

שיטה 1: האלגוריתם החמדני

נבחר את השבר $\frac{1}{k}$ כשבר יסודי הכי גדול (שעדיין מותר להשתמש בו) שקטן או שווה לשבר $\frac{a}{b}$, ונחסיר את $\frac{1}{k}$ מ-$\frac{a}{b}$.

שאלה 4:

הוכיחו שאם נתחיל משבר שקטן מ-1 אז בכל שלב הולך להתקיים האי-שוויון הבא:

$$\frac{1}{k}\leq\frac{a}{b}<\frac{1}{k-1}$$

שאלה 5:

הוכיחו שאם נתחיל משבר שקטן מ-1 אז בכל שלב של התהליך המונה של השבר שלנו הולך לקטון.
הראו שזה אומר שכל שבר $\frac{a_0}{b_0}$ שקטן מ-1 ייהפוך לשבר מצרי באורך שלא עולה על a_0.

הערה: האלגוריתם עובד גם לשברים שגדולים מ-1, אך לא נדרוש מכם להוכיח זאת.

שיטה 2:

בצורה דומה לאלגוריתם חמדני מסתבר שכל שבר שקטן מ-2 אפשר להציג בצורה הבאה:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{g_1}+\frac{1}{g_1g_2}+\frac{1}{g_1g_2g_3}+\cdots+\frac{1}{g_1g_2g_3\cdots g_n}$$

בתאבון!

שברים מצריים

הפעם בכל שלב אנחנו בוחרים שבר יסודי חדש $\frac{1}{k}$ הכי גדול (שעדיין מותר להשתמש בו) שקטן או שווה לשבר שנשאר, והמכנה שלו מתחלק במכנה של השבר היסודי הקודם שהוחסר.

אפשר להוכיח שעבור מספרים שגדולים או שווים ל-2 השיטה הזאת לא תעבוד. מסתבר שלכל מספר שקטן מ-2 השיטה הזאת עובדת, ואפילו מתקיים $g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq g_n$.

שאלה 6:
האם שיטה 1 ושיטה 2 בהכרח נותנות את אותה התוצאה לכל שבר שקטן מ-1?

שיטה 3:

נתחיל משבר שקטן מ-1. בכל שלב של התהליך , כשהגענו לשבר מצומצם מצורה $\frac{a}{b}$, נמצא x, y טבעיים קטנים ביותר, עבורם $ax - by = 1$. נחסיר את השבר $\frac{1}{bx}$ מ-$\frac{a}{b}$.

שאלה 7: הוכיחו ששיטה 3 עובדת לכל שבר שקטן מ-1. רמז: התחילו בלהראות כי $\frac{a}{b} = \frac{1}{bx} + \frac{y}{x}$.

שאלה 8: הוכיחו שהמכנים שמקבלים בשבר מיצרי בשיטה 3 יהיו כולם קטנים מ-$b_0^2 - b_0$, כאשר $\frac{a_0}{b_0}$ זה השבר המקורי.

שיטות התרת התנגשויות

בשיטות הבאות הרעיון הוא להציג את השבר $\frac{a}{b}$ בתור $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}$, ואז בדרך כזו או אחרת לשנות את הסכום עד שלא יישארו בו מחוברים זהים.

שיטה 4: בשיטה הזאת כל עוד יש 2 שברים זהים בסכום הגדול נעשה איתם את אחת הפעולות הבאות: במקרה שבסכום יש 2 שברים עם אותו מכנה זוגי: $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$, נהפוך אותם לשבר $\frac{1}{n}$. במקרה בסכום יש רק שברים עם מכנה אי-זוגי נשתמש ב: $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n\cdot(2n-1)}$.

שאלה 9: הוכיחו כי השיטה הזאת עובדת לכל שבר $\frac{a_0}{b_0}$ שקטן מ-1, והראו שהשבר ייהפך לשבר מצרי באורך שלא עולה על a_0.

שאלה 10: מצאו את כל ההצגות האפשריות של השבר $\frac{5}{6}$ ושל השבר $\frac{42}{43}$ כשבר מצרי באורך 3.

שאלה 11: מצאו את כל השלשות של מספרים טבעיים שונים x, y, z עבורם מתקיים:

$$6(xy + yz + zx) = 5xyz$$

ויש עוד הרבה שיטות נוספות בהן ניתן להשתמש בשביל לבנות שברים מצריים.

למשל אפשר להשתמש בזהות $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ כמה פעמים בשביל להגדיל את המכנים וכך להפטר ממכנים זהים.

בתאבון!

ועוד שאלה

בסדרה של מספרים שלמים $a_1, a_2, ..., a_{108}$ כל מספר יותר גדול מהמספר הקודם, $a_1 = 0$,
ומתקיים $(a_n - a_{n+1})^2 = a_n + a_{n+1}$ לכל $1 \le n \le 107$. מצאו את a_{108}.

בתאבון!