חלק 1:

<u>פתרון כללי של המשוואה $x^2+y^2=z^2$ (במספרים טבעיים)</u>

אפשר להוציא מחלק משותף k ואז x_0,y_0,z_0 יהיו זרים ואז גם זרים בזוגות

לא יכול להיות ש-x , y איזוגיים בו זמנית.

לה"כ אחרי הוצאת k נשאר לנו y_0 זוגי.

$$\left(\frac{y_0}{2}\right)^2=\frac{z_0-x_0}{2}\cdot\frac{z_0+x_0}{2}$$

x_0,z_0 זרים ואיזוגיים, ולכן $\frac{z_0+x_0}{2},\frac{z_0-x_0}{2}$ זרים. לכן כל אחד מהם ריבוע. נסמן $\frac{z_0+x_0}{2}=m^2$, $\frac{z_0-x_0}{2}=n^2$.

מכאן $z_0=m^2+n^2$,$x_0=m^2-n^2$, $y_0=2mn$

חלק 2:

<u>חלק 2 – פתרון כללי (במובן הריק) של מערכת המשוואות</u> $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\x^2-y^2=w^2\end{cases}$ (במספרים טבעיים)

ניקח z טבעי הכי קטן שמקיים את המשוואה.

נשים לב כי $w<z$.

עבורו x,y,z חייבים להיות זרים בזוגות, y חייב להיות זוגי וגם x,y,z,w יוצאים זרים בזוגות

אם נחבר את המשוואות נקבל $2x^2=z^2+w^2$

$$(2x)^2=2z^2+2w^2$$

$$(2x)^2=(z+w)^2+(z-w)^2$$

$z+w,z-w$ חייבים להיות זוגיים:

$$x^2=\left(\frac{z+w}{2}\right)^2+\left(\frac{z-w}{2}\right)^2$$

$x,\frac{z+w}{2},\frac{z-w}{2}$ חייבים להיות זרים בזוגות

לפי טענה על שלשות פיתגוריות קיימים m,n כאלה ש-$\frac{z-w}{2},\frac{z+w}{2}$ הם $m^2-n^2,2mn$ בסדר כלשהו.

$$m+n\le m^2-n^2\le\frac{z+w}{2}<z$$

לכן בגלל ש-$2y^2=z^2-w^2$ נקבל $\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{1}{8}(z-w)(z+w)$ כלומר $\left(\frac{y}{2}\right)^2=mn(m-n)(m+n)$

m,n זרים, ואחד מהם זוגי ולכן $m,n,m-n,m+n$ זרים בזוגות.

לכן כולם ריבועים.

$$m=a^2,n=b^2,m-n=c^2,m+n=d^2$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=d^2\\a^2-b^2=c^2\end{cases}$$

$$d<m+n<z$$

סתירה