



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-1

שלב הגמר, שנת תש"פ – פתרונות

שאלה 1.

הרכיבו מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 שלושה מספרים, כך שאחד מהם יהיה סכום של השניים האחרים. יש להשתמש בכל ספרה בדיוק פעם אחת.

פתרון.

יש הרבה אפשרויות, למשל $238 + 716 = 954$.

שאלה 2.

כיתה ד', המונה 32 תלמידים, יצאה לטיול. על התלמידים היה להביא כובעים, משקפי שמש ובקבוקי שתייה. אין ילד ששכח את כל הדברים האלה, אבל:
מבין התלמידים שהביאו כובעים, 9 שכחו משקפי שמש,
מבין התלמידים שהביאו משקפי שמש, 7 שכחו בקבוקי שתייה,
ומבין התלמידים שהביאו בקבוקי שתייה, 10 שכחו משקפי שמש.
כמה מתלמידים מהכיתה הביאו את כל מה שדרוש לטיול? מצאו את כל האפשרויות ונמקו את תשובתכם.

פתרון.

נספור את כל התלמידים בכל הקבוצות הנתונות (אולי נספור מישוהו יותר מפעם אחד):
 $9 + 7 + 10 = 26$. עכשיו נראה את מי ספרנו וכמה פעמים ואת מי לא ספרנו.

נחלק את התלמידים ל-4 סוגים.

תלמידים ששכחו את כל הדברים בבית – כאלה לא קיימים.

תלמידים שהביאו רק דבר אחד מתוך השלושה. כל אחד כזה נספר בדיוק פעם אחד - לפי מה שהוא הביא.

תלמידים ששכחו רק דבר אחד מתוך השלושה. כל אחד כזה נספר בדיוק פעם אחד - לפי מה שהוא שכח.

תלמידים שהביאו הכל – כאלה עוד לא ספרנו.

לכן $32 - 26 = 6$ זו כמות התלמידים שהביאו הכל.



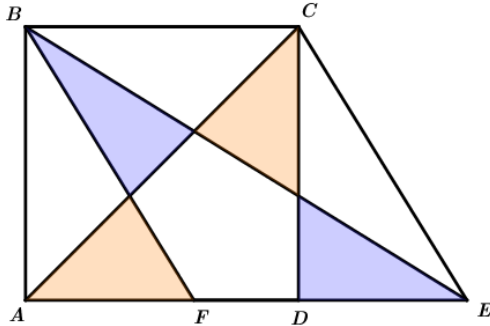
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב הגמר, שנת תש"פ – פתרונות

שאלה 3.

בציור ריבוע $ABCD$ ומקבילית $BCEF$.

איזה שטח גדול יותר: הכחול או הכתום?
נמקו את תשובתכם.



פתרון.

אם נוסיף את המחומש האמצעי לשני השטחים –
נקבל בכתום – משולש ADC , ובכחול – משולש

BFE . המשולש הראשון הוא חצי מהריבוע, והמשולש השני הוא חצי מהמקבילית, ולכן אפשר להשוות את הריבוע עם המקבילית. שטחים שלהם שווים כי יש להם אותו בסיס BC ואותו גובה CD .

לכן השטחים המקוריים גם שווים.

שאלה 4.

ביער הקסום חי שבט המונה 150 אנשים. כל יום אנשי השבט מנסים להתארגן כדי ללכת לצוד יחד, וכל יום כל אחד משתתף או לא משתתף לפי בחירתו. הוכיחו שבמהלך שבוע אחד בוודאות יהיו שני אנשים שיגיעו בדיוק באותם הימים.

הערה: גם ביער הקסום, בשבוע יש 7 ימים.

פתרון.

נספור כמה אפשרויות ללוח זמנים שבועי יש לכל בן אדם. בכל יום יש 2 אפשרויות: לצאת לצוד או לא לצאת לצוד. לכן ב 7 ימים יש $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$ אפשרויות.

יש יותר אנשים מכמות האפשרויות ללוח זמנים, לכן יש לפחות שניים עם אותו לוח זמנים בדיוק.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב הגמר, שנת תש"פ – פתרונות

שאלה 5.

לרחל יש שלושה כרטיסים עם ספרות שונות, שכולן גדולות מ-0. רחל הרכיבה מהכרטיסים האלה את כל המספרים התלת ספרתיים האפשריים וחישבה את סכומם. הוכיחו כי הסכום מתחלק ב-37.

פתרון.

קודם כל נשים לב שיש בדיוק 6 דרכים לסדר 3 ספרות, כלומר תמיד יהיו לרחל 6 מספרים.

$$\text{למשל } 431 + 413 + 341 + 314 + 143 + 134.$$

כל ספרה מופיעה בדיוק פעמיים בתפקיד של ספרת אחדות, פעמיים בתפקיד של ספרת עשרות, ופעמיים בתפקיד של ספרת מאות.

אם במקום המספרים של רחל ניקח 6 מספרים שמורכבים מספרות של רחל, אבל בכל מספר יש את אותה הספרה 3 פעמים, כל שכל ספרה מופיעה ב-2 מהמספרים, נראה שגם במספרים אלה כל ספרה מופיעה בדיוק פעמיים בתפקיד של ספרת אחדות, פעמיים בתפקיד של ספרת עשרות, ופעמיים בתפקיד של ספרת מאות.

לכן ל-6 מספרים חדשים יש את אותו הסכום.

$$\text{למשל: } 134 + 143 + 314 + 341 + 413 + 431 = 111 + 111 + 333 + 333 + 444 + 444$$

עכשיו כל המספרים החדשים מתחלקים ב-111, ולכן הם מתחלקים גם ב-37. (כי 111 מתחלק ב-37)

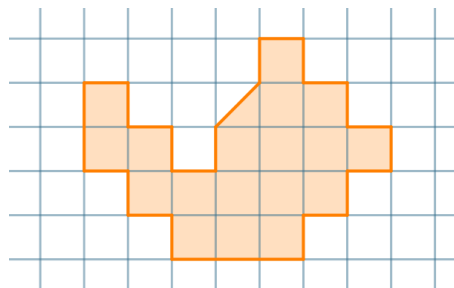
ולכן גם הסכום הכולל מתחלק ב-37.



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו שלב הגמר, שנת תש"פ – פתרונות

שאלה 6.

צורות גיאומטריות נקראות *חופפות* אם הן מתלכדות כאשר שמים אותן זו על זו. חתכו את הצורה לשני חלקים חופפים:



פתרון.

