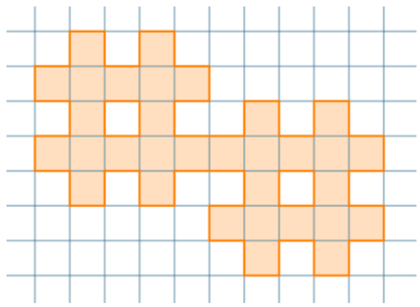
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב ב

שאלה 1.

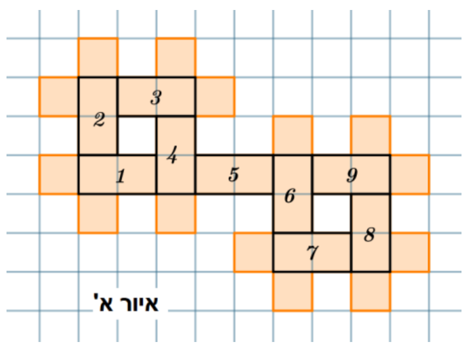
מהו המספר המרבי של צורות "דומינו" (מלבנים 1×2 או 2×1) שניתן למקם בתוך הצורה הכתומה, כך שהם לא יעלו אחד על השני ולא יחרגו מחוץ לגבולות הצורה?



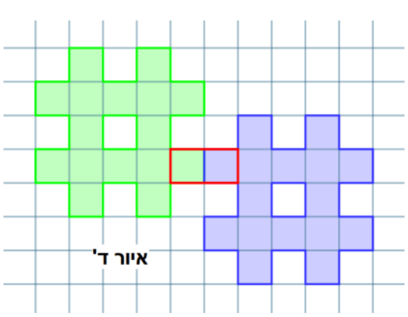
תשובה. 9.

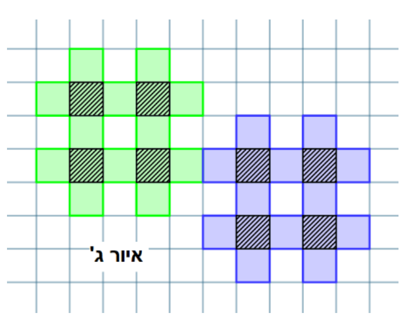
פתרון.

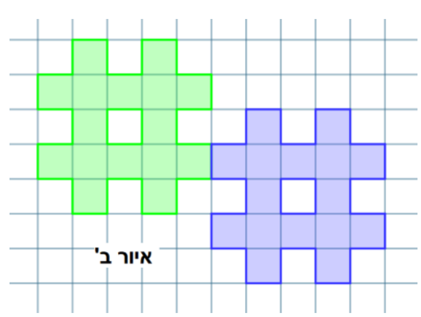
באיור א' אנחנו מדגימים כיצד אפשר למקם בתוך הצורה 9 אבני דומינו:



נראה שאי אפשר למקם בתוך הצורה יותר מ-9 אבני דומינו. נחלק את הצורה לשתי "יחידות" זהות (איור ב'). נצבע כל אחת מהיחידות האלה (בנפרד!) בצביעת שחמט (איור ג'). בכל יחידה יש רק 4 משבצות שחורות. נשים לב שכל אבן דומינו תופסת, בפרט, משבצות אחת שחורה. לכן, אם נתבונן בכל אחת היחידות בנפרד, אפשר למקם בתוכה לכל היותר 4 אבני דומינו. אבל, בנוסף, אנחנו יכולים לשים גם אבני דומינו שמכסות משבצות משתי היחידות בו זמנית. זה מוסיף אבן אחת בדיוק, כי יש בדיוק מקום אחד איפה אפשר לעשות זאת – במקום איפה ששתי היחידות מתחברות (איור ד').







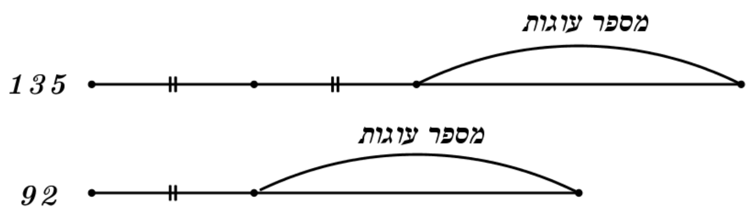
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב ב

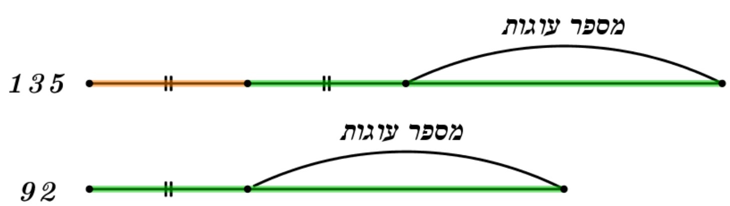
<u>שאלה 2.</u>
בבוקר במחסן של מאפייה היה 135 קילוגרמים של קמח ו-92 קילוגרמים של סוכר. לאפיית עוגה אחת, האופה משתמש בקילוגרם אחד של קמח וקילוגרם אחד של סוכר. בסיום יום עבודה כמות הקמח שנשארה לאופה הייתה פי שתיים גדולה יותר מכמות הסוכר שנשארה. כמה עוגות הכין האופה תוך יום העבודה?

<u>תשובה.</u> 49.

<u>פתרון.</u>
נתאר את נתוני השאלה בצורה גרפית:



נשים לב שהתרשים השני זהה לחלק מהתרשים הראשון:



לכן ההפרש בין כמות ההתחלתית של הקמח לכמות ההתחלתית של הסוכר שווה לאורך הקטע הכתום. במילים אחרות, כמות הסוכר שתישאר, שווה ל-$135-92=43$ קילוגרמים.
לכן, האופה השתמש ב-$92-43=49$ קילוגרמים של סוכר, כלומר, הוא הכין 49 עוגות.

<u>בדיקה.</u> $135-49=86=2\cdot 43=2\cdot(92-49)$.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב ב

<u>שאלה 3.</u>
בביטוי הבא אותיות שונות מסמנות ספרות שונות, ואותיות זהות מסמנות ספרות זהות:

שלב = לבש + בלש

מצאו את המספר **שלב**.

<u>תשובה.</u> 954

<u>פתרון.</u>

נשים לב כי **לב + בל** מתחלק ב11. מצד שני התוצאה היא **של** או **של1** , כלומר 2 ספרות אחרונות של תוצאה הן שונות. לכן התוצאה היא מהצורה **של1** , כאשר **ל = ש + 1** .

מצד שני לפי ספרת העשרות **ל + ב + 1 = ל1** , ולכן **ב = 9** . מכאן לפי ספרת העשרות:

ש + ש + 1 = 9 , **ש = 4** , ומכאן **ל = 5.**

ולכן **שלב = 954** .

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב ב

<u>שאלה 4.</u>
נתון מספר שלם חיובי שקטן מ-2000.
אם הוא לא מתחלק ב-43 אז הוא מתחלק ב-41,
אם הוא לא מתחלק ב-53 אז הוא מתחלק ב-43,
אם הוא לא מתחלק ב-41 אז הוא מתחלק ב-53.
מצאו את המספר.

<u>תשובה:</u> 1763

<u>פתרון.</u>
נסמן את המספר שלנו ב-X. נשים לב שלמספרים 41, 43, 51 לאף זוג אין מחלקים משותפים. מצד שני לכל אחד מזוגות של המספרים האלו – אם X לא מתחלק באחד מהם אז הוא מתחלק באחר. כלומר לכל זוג מתוך המספרים 41, 43, 51 – X מתחלק לפחות באחד מהם. לכן X מתחלק לפחות ב-2 מתוך המספרים 41, 43, 51. נשים לב ש-$51\cdot 43 > 51\cdot 41 > 50\cdot 40 = 2000$, ולכן מספר שקטן מ-2000 לא יכול להתחלק גם ב-53 וגם ב-41 או 43. לכן X מתחלק ב-41 וגם ב-43, כלומר הוא מתחלק ב-1763. המספר היחיד שמתחלק ב-1763 וקטן מ-2000 הוא 1763 עצמו, ולכן $X = 1763$.

<u>האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו</u>

שלב ב

<u>שאלה 5.</u>
לצייר יש לוח משבצות 10×10. כל פעם הצייר בוחר שורה או עמודה וצובע את כולה בצבע לבחירתו. אם הוא עובר עם צבע חדש על משבצת שכבר נצבעה, הצבע החדש מכסה את הצבע הישן במלואו, כלומר, צבע המשבצת מתחלף.
מהו המספר הגדול ביותר של צבעים שנוכל לראות על הלוח הזה?

<u>תשובה.</u> 19

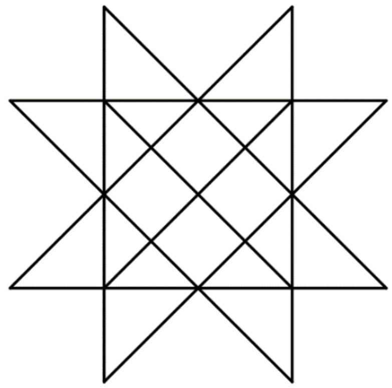
<u>פתרון.</u>
בלוח יש 10 שורות ו10 עמודות, ולכן לא נוכל לראות יותר מ20 צבעים על הלוח הסופי. אבל כדי שיהיו 20 צבעים הצייר חייב לעבור על כל השורות ועל כל העמודות, ולא לכסות אף אחד מהן במהלך התהליך. זה בלתי אפשרי, והנה ההוכחה:

קודם כל נתעלם מכל השורות והעמודות שמכוסות לגברי, כי לא רואים אותן בצביעה הסופית. מהשורות והעמודות שנשארו נסתכל על הראשונה שנצבעה. נניח, בלי להגביל את הכלליות, שזו הייתה שורה. אחרי השורה הזאת הצייר היה יכול לצבוע רק 9 שורות נוספות, ו9 עמודות נוספות, כי אם הוא היה צובע 10 עמודות אחרי השורה הזאת – אז היא כולה הייתה מכוסה. לכן המספר הגדול ביותר של צבעים שנוכל לראות בצביעה הסופית הוא 19.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב ב

שאלה 6.
כמה משולשים יש בתמונה?



תשובה. 52

פתרון.

נספור את כל המשולשים לפי שטח שלהם. נסמן את שטח של משולש הכי קטן ב1.

משולשים בעלי שטח 1 יש 8. בעלי שטח 2 – 12. בעלי שטח 4 – 12. בעלי שטח 8 – 4. בעלי שטח 9 – 8. בעלי שטח 16 – 4, ובעלי שטח 18 – גם 4. בסה"כ 52 משולשים.

הערה: יש גם פתרונות יותר מסודרים, למשל:

משולשים עם צלע אופקית ואנכית יש 5 בכל פינה של הריבוע, כלומר 20 בסה"כ.
ומשולשים שיש להם רק צלע אופקית או אנכית אחת יש: 8 לכל אחת מהצלעות של הריבוע, כלומר 32 בסה"כ.

לכן יש 52 משולשים.

בהצלחה!