

## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

### שלב ב

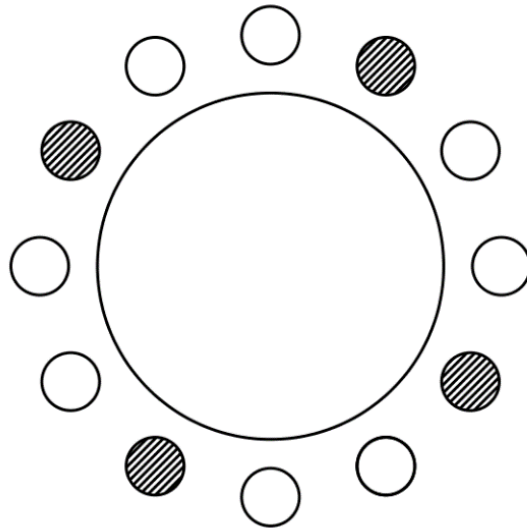
#### שאלה 1.

סביב שולחן עגול 12 כיסאות, על חלק מהכיסאות יושבים אבירים. ארתור רוצה להצטרף לשיבה, ומסתבר שלא משנה איפה הוא יושב, בוודאות מישהו יושב לידו. מהו המספר הקטן ביותר של אבירים שיכולים להיות סביב השולחן כדי שזה בוודאות יתקיים? (לא כולל ארתור).

#### תשובה 4.

#### פתרון.

ננסה להבין מהם המרווחים בין האבירים. אילו היו ליד השולחן איפה שהוא שלושה כיסאות ריקים ברצף, ארתור היה יכול לשבת על הכיסה האמצעי מבינם, ואז לא היו לו "שכנים". לכן, אסור שיהיה רווח של 3 כיסאות, כלומר, מתוך כל שלישייה של כיסאות סמוכים, לפחות אחד תפוס. זה מוכיח שלא יכול להיות פחות מ-4 אבירים, וכאן הדוגמה שמראה ש-4 אכן אפשרי (עיגולים ריקים מסמנים כיסאות ריקים, עיגולים מקווקוים מסמנים אבירים):

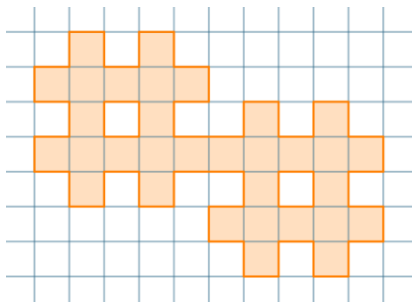


# האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

## שלב ב

### שאלה 2.

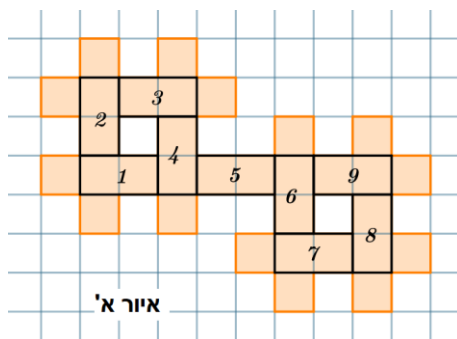
מהו המספר המרבי של צורות "דומינו" (מלבנים  $2 \times 1$  או  $1 \times 2$ ) שניתן למקם בתוך הצורה הכתומה, כך שהם לא יעלו אחד על השני ולא יחרגו מחוץ לגבולות הצורה?



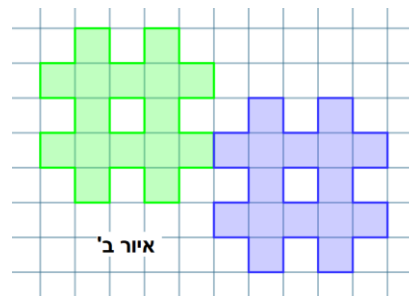
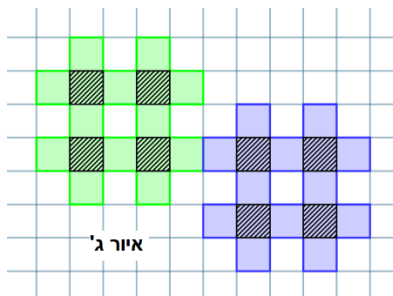
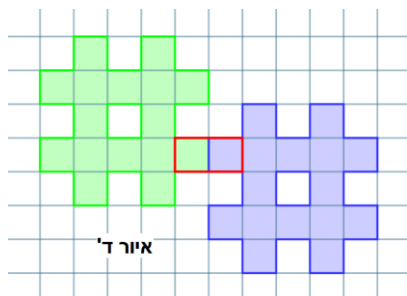
### תשובה 9.

#### פתרון.

באיור א' אנחנו מדגימים כיצד אפשר למקם בתוך הצורה 9 אבני דומינו:



נראה שאי אפשר למקום בתוך הצורה יותר מ-9 אבני דומינו. נחלק את הצורה לשתי "יחידות" זהות (איור ב'). נצבע כל אחת מהיחידות האלה (בנפרד!) בצביעת שחמט (איור ג'). בכל יחידה יש רק 4 משבצות שחורות. לכן, אם נתבונן בכל אחת היחידות בנפרד, אפשר למקם בתוכה לכל היותר 4 אבני דומינו. אבל, בנוסף, אנחנו יכולים לשים גם אבני דומינו שמכסות משבצות משתי היחידות בו זמנית. זה מוסיף אבן אחת בדיוק, כי יש בדיוק מקום אחד איפה אפשר לעשות זאת – במקום איפה ששתי היחידות מתחברות (איור ד').



## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

### שלב ב

#### שאלה 3.

אבן דומינו היא מלבן המורכב משני ריבועים, שעל כל אחד מהריבועים מסומנות נקודות. מספר הנקודות על כל ריבוע יכול להיות מ-0 עד 6, וכל צירוף של זוג מספרים נמצא פעם אחת בדיוק (ללא חשיבות לסדר). סך הכל יש במשחק 28 אבנים. כמה נקודות יש על האבנים האלה בסך הכל?

תשובה. 168.

#### פתרון.

לשם פשטות, נדמיין שמה שרשום על אבני הדומינו אלה מספרים (ככמות הנקודות). נשים לב שכל אחד המספרים מ-0 עד 6 מופיע 8 פעמים: 6 פעמים בזוג עם כל המספרים האחרים, ופעמיים על האבן "דאבל" של אותו המספר. לכן, סכום כל המספרים הוא:

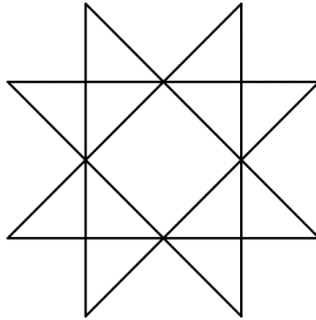
$$(0+1+2+3+4+5+6) \cdot 8 = \frac{6 \cdot 7}{2} \cdot 8 = 21 \cdot 8 = 168$$

# האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

## שלב ב

### שאלה 4.

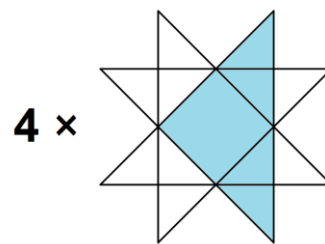
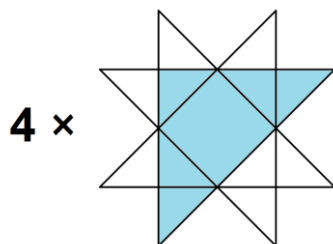
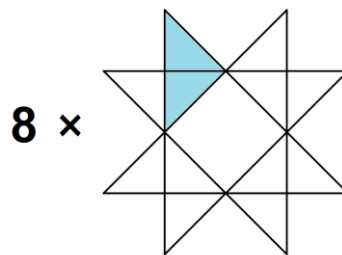
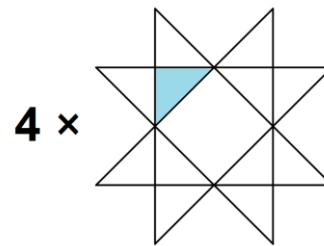
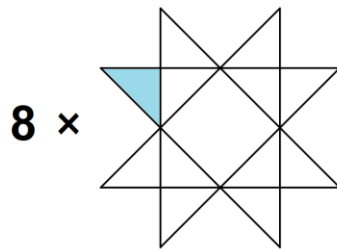
כמה משולשים יש בתמונה?



### תשובה 28.

### פתרון.

לשם פשטות, נמיינ את המשולשים לפי סוגים, ונספור כמה יש מכל סוג:



לכן, סך הכל יש  $4 + 8 + 8 + 4 + 4 = 28$  משולשים.

# האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

## שלב ב

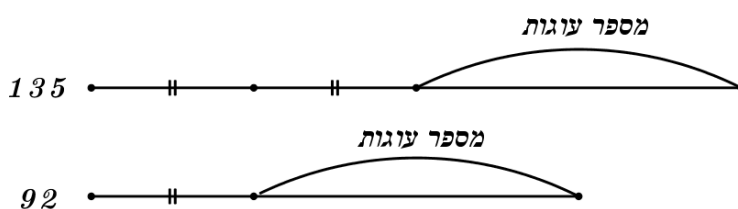
### שאלה 5.

בבוקר במחסן של מאפייה היה 135 קילוגרמים של קמח ו-92 קילוגרמים של סוכר. לאפיית עוגה אחת, האופה משתמש בקילוגרם אחד של קמח וקילוגרם אחד של סוכר. בסיום יום עבודה כמות הקמח שנשארה לאופה הייתה פי שתיים גדולה יותר מכמות הסוכר שנשארה. כמה עוגות הכין האופה תוך יום העבודה?

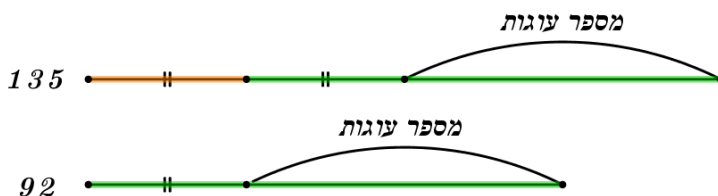
### תשובה. 49.

### פתרון.

נתאר את נתוני השאלה בצורה גרפית:



נשים לב שהתרשים השני זהה לחלק מהתרשים הראשון:



לכן ההפרש בין כמות ההתחלתית של הקמח לכמות ההתחלתית של הסוכר שווה לאורך הקטע הכתום. במילים אחרות, כמות הסוכר שתישאר, שווה ל- $43 = 135 - 92$  קילוגרמים. לכן, האופה השתמש ב- $49 = 92 - 43$  קילוגרמים של סוכר, כלומר, הוא הכין 49 עוגות.

בדיקה.  $135 - 49 = 86 = 2 \cdot 43 = 2 \cdot (92 - 49)$ .

## האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

### שלב ב

#### שאלה 6.

נתון מספר שלם חיובי שקטן מ-2000.  
אם הוא לא מתחלק ב-43 אז הוא מתחלק ב-41,  
אם הוא לא מתחלק ב-53 אז הוא מתחלק ב-43,  
אם הוא לא מתחלק ב-41 אז הוא מתחלק ב-53.  
מצאו את המספר.

תשובה: 1763

#### פתרון.

נסמן את המספר שלנו ב- $X$ . נשים לב שלמספרים 41, 43, 51 לאף זוג אין מחלקים משותפים. מצד שני לכל אחד מזוגות של המספרים האלו – אם  $X$  לא מתחלק באחד מהם אז הוא מתחלק באחר. כלומר לכל זוג מתוך המספרים 41, 43, 51 –  $X$  מתחלק לפחות באחד מהם. לכן  $X$  מתחלק לפחות ב-2 מתוך המספרים 41, 43, 51. נשים לב ש- $2000 = 50 \cdot 40 = 51 \cdot 41 > 51 \cdot 43$ , ולכן מספר שקטן מ-2000 לא יכול להתחלק גם ב-53 וגם ב-41 או ב-43. לכן  $X$  מתחלק ב-41 וגם ב-43, כלומר הוא מתחלק ב-1763. המספר היחיד שמתחלק ב-1763 וקטן מ-2000 הוא 1763 עצמו, ולכן  $X = 1763$ .