

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב א

שאלה 1.

יעל כותבת מספרים עשר ספרתיים, שברישום העשרוני שלהם כל אחת מבין הספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 מופיעה פעם אחת בדיוק. במספרים שיעל כותבת, ההפרש בין כל שתי ספרות סמוכות הוא לפחות 2. מהו המספר הקטן ביותר שיעל יכולה לכתוב?

תשובה. 1302468579

פתרון.

בכדי שהמספר שיתקבל יצא הקטן ביותר בכל שלב נרשום את הספרה הקטנה ביותר שאפשר לרשום. נתחיל מאחד (נשים לב שאסור שהספרה הראשונה תהיה 0) אחר כך אסור לרשום 0 ו-2 אז נרשום 3, אחר אפשר 0 אז נרשום 0, אחר כך אפשר 2 אז נרשום 2, אחר כך אפשר 4 אז נרשום 4, לאחר מכאן אסור 5 אז נרשום 6, שוב אסור 5 ואסור גם את 7 אז נרשום 8, עכשיו כבר אפשר 5 אז נרשום ואז 7 ואז 9.

שאלה 2.

בתרגילי חשבון הבאים אותיות שונות מחליפות ספרות שונות, ואותיות זהות מחליפות ספרות זהות.

$$19 = ט + מ + ח + ש$$

$$10 = ק + ח + ש + מ$$

חשבו את ערך הביטוי: $ח + מ + ש$

תשובה. 10

פתרון.

נחשב את ההפרש בין $ח + מ + ש$ ל- $ט + מ + ח + ש + מ + ח + ש + ק$. מצד אחד זה $19 - 9 = 10$. מצד שני זה ההפרש בין $ט$ ל- $ק$ כי האותיות $ח, מ, ש$ מופיעות גם ב- $ח + מ + ש + ט$ וגם ב- $ח + מ + ש + ק$.

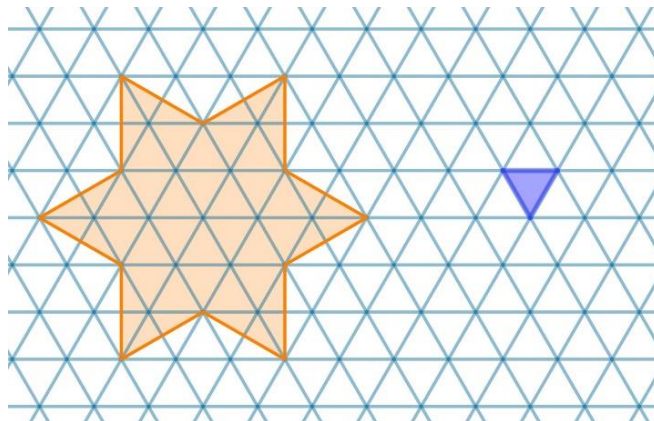
קיבלנו שההפרש בין $ט$ ל- $ק$ הוא 9 אבל שתי הספרות היחידות שההפרש ביניהן הוא 9 הן 0 ו-9 ולכן $ק = 0$ ומכאן נקבל ש- $ש + מ + ח = ח + מ + ש + ט + ח + ש + ק = 10$.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב א

שאלה 3.

השטח של המשולש הכחול שווה ל-1. חשבו את השטח של מגן דוד הכתום:



תשובה 36

פתרון.

מגן דוד מורכב מ-12 משולשים:

במקרה שלנו כל אחד מ-12 משולשים מורכב מ-6 חצאים של משבצת



שטח של 12



משולשית ששטחה 1, לכן שטח של כל משולש כזה 3, ושטח של 12 משולשים כאלה זה 36.

שאלה 4.

נתונים חמישה מספרים שלמים חיוביים שונים. סכום המספרים האלה שווה ל-27. בנוסף, ידוע שמכפלה של חמישה המספרים האלה אי זוגית. חשבו את המכפלה הזאת.

תשובה 1155

פתרון.

מכפלת המספרים אי-זוגית ולכן כל אחד מבין המספרים אי-זוגי. חמשת המספרים האי-זוגיים הקטנים ביותר הם 1,3,5,7,9 וסכומם הוא 25. בכדי להגדיל את הסכום ב-2 צריך להגדיל את אחד מהמספרים האלו ב-2 והדרך היחידה לעשות זאת ולשמור על כך שכל המספרים יהיו שונים היא להפוך את 9 ל-11 ולכן המספרים שחיפשנו הם 1,3,5,7,11 ומכפלתם היא 1155

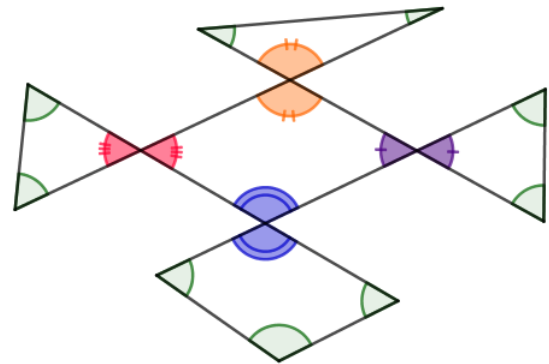
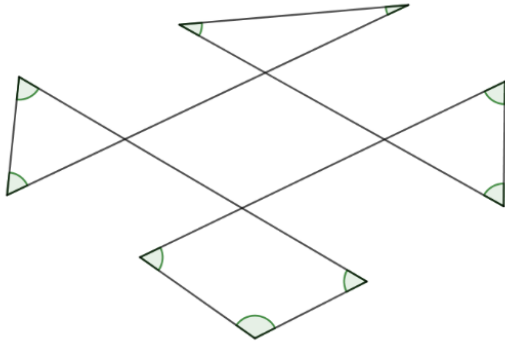
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב א

שאלה 5.

חשבו את סכום הזוויות המסומנות:

תשובה. 540



פתרון. סכום של זווית סגולה, כתומה, אדומה וכחולה 360° כי זה סכום הזוויות של מרובע. סכום של שתי זוויות ירוקות שווה 180° פחות זווית סגולה (הרי 180° זה סכום הזוויות במשולש); של שתי זוויות ירוקות נוספות זה

180° פחות זווית כתומה; של שתי זוויות ירוקות נוספות שווה 180° פחות זווית אדומה, ושל 3 זוויות ירוקות אחרונות שווה ל- 360° פחות זווית כחולה.

לכן סכום של כל הזוויות הירוקות שווה ל- $360^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$ פחות סכום של 4 הזוויות בצבעים: סגול+כתום+אדום+כחול, שזה 360° . לכן סכום הזוויות הירוקות שווה $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$ שזה 540° .

שאלה 6.

לאביב יש קוביות משחק, שבכל אחת מהן שתי פאות נגדיות צבועות באדום והשאר בכחול. אביב הדביק קובייה $3 \times 3 \times 3$ מקוביות המשחק. לאחר מכן הגיע חברו כפיר וחישב את כל השטח האדום על פני הקובייה הגדולה. מהי התוצאה הגדולה ביותר שכפיר יכול לקבל?

תשובה. 26

פתרון. הקובייה מורכבת מ-27 קוביות קטנות; אחת מהן בפנים וכל 26 הקוביות הקטנות האחרות סמוכות למעטפת. מבין הפאות הנראות של כל קובייה במעטפת רק פאה אחת יכולה להיות אדומה (יתכן שיש שתיים או שלוש פאות של הקובייה הקטנה שרואים, אבל לא יתכן שרואים שתי פאות נגדיות). סה"כ המקסימום שכפיר יכול לקבל זה 26.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב א

שאלה 7.

מירי רושמת את כל המספרים שברישיום העשרוני שלהם מופיעות רק הספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6 (לא כל הספרות חייבות להופיע) וכל הספרות שמופיעות רשומות בסדר עולה (למשל 1356 או 124 או 5 אבל לא 163 ולא 1223). כמה מספרים מירי תרשום?

תשובה 63.

פתרון.

אנחנו יכולים לחשוב על הרכבת המספרים של מירי באופן הבא: קודם מירי תבחר ספרות, ואז היא תסדר אותן בסדר עולה. כל פעם, יש רק דרך אחת לסדר את הספרות שנבחרו בסדר עולה, לכן כמות המספרים שווה לכמות הדרכים לבחור קבוצה של ספרות מתוך הספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6. לא דייקנו קצת במשפט האחרון כי יש גם את הקבוצה "לא בחרנו ספרות" אבל אי-אפשר להרכיב ממנה שום מספר ולכן בעצם כמות המספרים שווה לכמות הדרכים לבחור קבוצה של ספרות פחות אחד.

כעת נחשב כמה דרכים יש לבחור בקבוצה של ספרות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6 ובואו נגיד שכבר חישבנו כמה דרכים יש לבחור קבוצה של ספרות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5. אז כל קבוצה של ספרות מתוך 1, 2, 3, 4, 5 היא גם קבוצה מתוך 1, 2, 3, 4, 5, 6 אבל בנוסף לכל קבוצה של ספרות אפשר להוסיף את הספרה 5 וכך לקבל קבוצה חדשה שעוד לא הייתה קודם ולכן כמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6 היא פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5 ובדיוק באותו אופן כמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5 היא פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4 שהיא פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3 שהיא פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1, 2 שהיא בתורה פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1 וכאלה יש שתיים: הקבוצה שהיא "1" והקבוצה שהיא "ספרות אין".

סך הכל קיבלנו שכמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6 היא $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ שזה 64 ולכן מיני יכלה לרשום 63 מספרים.

דרך אחרת ויותר קצרה לחשב כמה בכמה דרכים אפשר לבחור קבוצה מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6 היא כזו: נשים לב שכל פעם שרוצים לבחור קבוצה, עבור כל ספרה אנו צריכים לעשות את הבחירה האם להכניס אותה לקבוצה או לא, כלומר לכל ספרה יש שתי אופציות ויש 5 ספרות ולכן יש $2^5 = 64$ דרכים לבחור קבוצת ספרות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6.