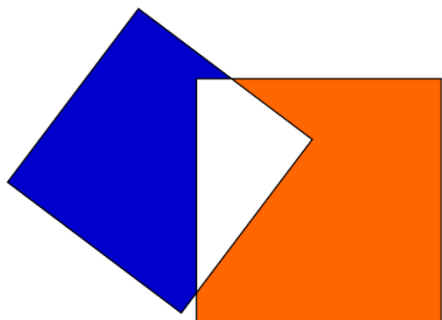


האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

שלב א



שאלה 1.

נתונים שני ריבועים כמתואר בציור. אורך הצלע של הריבוע הגדול יותר הוא 9, אורך הצלע של הריבוע הקטן יותר הוא 8. מהו ההפרש בין השטח הכתום לשטח הכחול?

תשובה 17.

פתרון.

שטח של הריבוע הגדול יותר שווה ל- $9^2 = 81$, ושטח של הריבוע הקטן יותר – $8^2 = 64$. ההפרש השטחים של הריבועים הינו $81 - 64 = 17$. השטח הכתום שווה לשטח הריבוע הגדול פחות השטח הלבן, והשטח הכחול שווה לשטח הריבוע הקטן פחות השטח הלבן. לכן ההפרש בין השטח הכתום לשטח הכחול שווה להפרש בין שטחי הריבועים, כלומר 17.

שאלה 2.

בתרגילי חשבון הבאים אותיות שונות מחליפות ספרות שונות, ואותיות זהות מחליפות ספרות זהות.

$$5 = ש + מ + ח$$

$$9 = ש + מ + ש$$

$$ח + ש$$

חשבו את ערך הביטוי:

תשובה 4.

פתרון.

$$\begin{array}{r} 9 = ש + מ + ש \\ - 5 = ש + מ + ח \\ \hline 4 = ש - ח \end{array}$$

נתבונן באות ש'. מצד אחד, $ש \geq 4$, כי $ש - ח = 4$. מצד שני, ש' לא יכולה להיות 5 או יותר, כי $ש + מ + ש = 9$. לכן $ש = 4$. מכאן $ח = 0$, כי $ש - ח = 4$. ולכן $ש + ח = 4 + 0 = 4$.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

שלב א

שאלה 3.

יעל כותבת מספרים עשר ספרתיים, שבריטום העשרוני שלהם כל אחת מבין הספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 מופיעה פעם אחת בדיוק. במספרים שיעל כותבת, ההפרש בין כל שתי ספרות סמוכות הוא לפחות 2. מהו המספר הקטן ביותר שיעל יכולה לכתוב?

תשובה. 1302468579

פתרון.

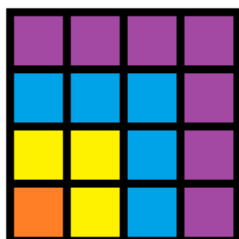
בכדי שהמספר שיתקבל יצא הקטן ביותר בכל שלב נרשום את הספרה הקטנה ביותר שאפשר לרשום. נתחיל מאחד (נשים לב שאסור שהספרה הראשונה תהיה 0) אחר כך אסור לרשום 0 ו-2 אז נרשום 3, אחר אפשר 0 אז נרשום 0, אחר כך אפשר 2 אז נרשום 2, אחר כך אפשר 4 אז נרשום 4, לאחר מכאן אסור 5 אז נרשום 6, שוב אסור 5 ואסור גם את 7 אז נרשום 8, עכשיו כבר אפשר 5 אז נרשום ואז 7 ואז 9.

שאלה 4.

נתונים ארבעה מספרים שלמים חיוביים שונים. סכום המספרים האלה שווה ל-18. בנוסף, ידוע שמכפלה של ארבעת המספרים האלה אי זוגית. חשבו את המכפלה הזאת.

תשובה. 135.

פתרון.



אם מכפלה של מספרים אי-זוגית, כל גורם אי-זוגי (הרי מספר זוגי כפול כל דבר נותן מספר זוגי). 4 מספרים אי-זוגיים הכי קטנים שיש אלה 1, 3, 5, 7. סכום המספרים האלה $4^2 = 16$ (ניתן לקבל את זה מחשבון או מתמונה בצד שמאל). ניתן להגדיל את 7, שהוא המספר הכי גדול ברשימה ב-2 נקבל ארבע מספרים אי-זוגיים שסכומם 18. אם היינו מגדילים ב-2 לא את המספר הכי גדול, היינו חייבים להגדיל גם כל מספר שגדול ממנו ב-2. אם נגדיל מספר כלשהו ב-1 ולא ב-2, נקבל גם מספרים זוגיים ברשימה שזה אסור. לכן 1, 3, 5, 9 זו רשימה יחידה של 4 מספרים אי-זוגיים שונים (כאשר רושמים את המספרים מהקטן לגדול) שמכפלתם אי-זוגית. מכפלת המספרים האלה היא $5 \cdot 3 \cdot 9 = 5 \cdot 27 = 135$. לכן 135 היא התשובה היחידה שאפשרית.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

שלב א

שאלה 5.

ברחוב הציונות גרים בנימין, חיים, יהודה ומקס. בנימין יצא מביתו, הלך 169 מטרים והגיע לביתו של חיים. לאחר מנוחה קצרה הלך 196 מטרים והגיע לביתו של יהודה. לאחר מכן הלך 171 מטרים והגיע לביתו של מקס, ולבסוף, לאחר שהלך 144 מטרים נוספים, חזר לביתו. מהו המרחק מהבית של בנימין לביתו של יהודה?

תשובה. 27

פתרון.

אפשר לשם קיצור לסמן נקודות על הרחוב באותיות: בית של בנימין B, בית של חיים H, בית של יהודה Y, בית של מקס B-M. מרחק בין בתים של בנימין וחיים הוא 169 ניתן לכתוב את זה באמצעות נוסחה קצרה $BH=169$. כמו כן את יתר נתוני השאלה ניתן לכתוב כך: $HY=196$, $YM=171$, $MB=144$. השאלה היא לגבי האורך BY. מכיוון שכל הנקודות על ישר, אז BY הוא סכום או הפרש של BH ושל HY (תלוי אם H בין B לבין Y או לא). לכן BY הוא $196+169$ או הפרשם שזה 27. מצד שני, BY הוא סכום או הפרש של MB ו-YM שזה $171+144$ או הפרשם שזה 27. אבל $196+169$ גדול מ- $171+144$, לכן אלה לא המספרים הנכונים, לכן המרחק הוא 27.

שאלה 6.

לאביב יש קוביות משחק, שבכל אחת מהן שתי פאות נגדיות צבועות באדום והשאר בכחול. אביב הדביק קובייה $2 \times 2 \times 2$ מקוביות המשחק. לאחר מכן הגיע חברו כפיר וחישב את כל השטח האדום על פני הקובייה הגדולה. מהי התוצאה הגדולה ביותר שכפיר יכול לקבל?

תשובה. 8

פתרון.

הקובייה מורכבת מ-8 קוביות קטנות; מבין הפאות הנראות של כל אחת מהקוביות רק פאה אחת יכולה להיות אדומה (לכל קובייה קטנה רואים שלוש פאות אבל לא רואים שתי פאות נגדיות). סה"כ כפיר יראה 8 פאות אדומות.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג-ד

שלב א

שאלה 7.

מירי רושמת את כל המספרים שברישום העשרוני שלהם מופיעות רק הספרות 1, 2, 3, 4, 5 (לא כל הספרות חייבות להופיע) וכל הספרות שמופיעות רשומות בסדר עולה (למשל 135 או 1234 או 5 אבל לא 153 ולא 1223). כמה מספרים מירי תרשום?

תשובה. 31

פתרון.

אנחנו יכולים לחשוב על הרכבת המספרים של מירי באופן הבא: קודם מירי תבחר ספרות, ואז היא תסדר אותן בסדר עולה. כל פעם, יש רק דרך אחת לסדר את הספרות שנבחרו בסדר עולה, לכן כמות המספרים שווה לכמות הדרכים לבחור קבוצה של ספרות מתוך הספרות 1, 2, 3, 4, 5. לא דייקנו קצת במשפט האחרון כי יש גם את הקבוצה "לא בחרנו ספרות" אבל אי-אפשר להרכיב ממנה שום מספר ולכן בעצם כמות המספרים שווה לכמות הדרכים לבחור קבוצה של ספרות פחות אחד.

כעת נחשב כמה דרכים יש לבחור בקבוצה של ספרות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5 ובואו נגיד שכבר חישבנו כמה דרכים יש לבחור קבוצה של ספרות מהספרות 1, 2, 3, 4. אז כל קבוצה של ספרות מתוך 1, 2, 3, 4 היא גם קבוצה מתוך 1, 2, 3, 4, 5 אבל בנוסף לכל קבוצה של ספרות אפשר להוסיף את הספרה 5 וכך לקבל קבוצה חדשה שעוד לא הייתה קודם ולכן כמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5 היא פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4 ובדיוק באותו אופן כמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4 היא פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3 שהיא פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1, 2 שהיא בתורה פי שתיים מכמות הקבוצות מהספרות 1 וכאלה יש שתיים: הקבוצה שהיא "1" והקבוצה שהיא "ספרות אין".

סך הכל קיבלנו שכמות הקבוצות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5 היא $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ שזה 32 ולכן מיני יכלה לרשום 31 מספרים.

דרך אחרת ויותר קצרה לחשב כמה בכמה דרכים אפשר לבחור קבוצה מהספרות 1, 2, 3, 4, 5 היא כזו: נשים לב שכל פעם שרוצים לבחור קבוצה, עבור כל ספרה אנו צריכים לעשות את הבחירה האם להכניס אותה לקבוצה או לא, כלומר לכל ספרה יש שתי אופציות ויש 5 ספרות ולכן יש $2^5 = 32$ דרכים לבחור קבוצת ספרות מהספרות 1, 2, 3, 4, 5.