

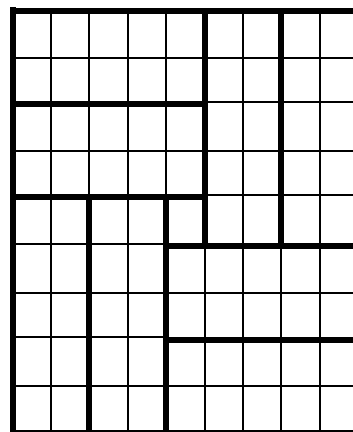
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב א'

1. מה הוא המספר הגדול ביותר של מלבנים בגודל 2×5 שאפשר לגזור מתוך ריבוע 9×9 ?

תשובה. 8.

הסבר. בציור מופיעה דוגמא לדרך לגזור 8 מלבנים. נותרנו עם משבצת אחת, אז אי אפשר היה לחתוך יותר.



2. רושמים על הלוח מספרים בעלי סכום 28 בסדר עולה. מה הוא המספר ה-24 מבינם?

תשובה. 5779.

הסבר. ננסה להבין איזה מספרים הכי קטנים יש עם סכום ספרות 28. זה לא יכול להיות מספר תלת-ספרתי – למספר כזה, סכום הספרות הכי גדול שיכול להיות הוא אם כל הספרות הן 9, אבל אז סכום הספרות הוא 27 שזה מעט מדי. לכן המספר צריך להיות לפחות 4 ספרתי. הכי קטן שאפשר זה אם ספרת האלפים היא 1. אז סכום שלושת הספרות האחרות צריך להיות 27, והסברנו שזה יכול לקרות רק אם זה 999. כלומר, המספר הכי קטן הוא 1999.

אחרי זה צריך לבדוק מספרים שספרת האלפים שלהם היא 2. אז סכום הספרות האחרות צריך להיות 26. זה 1 פחות מסכום הספרות של 999 – אז חייבים להוריד 1 מאיזושהי ספרה. כלומר זה צריך להיות איזשהו סידור של 9, 9, 8. יש רק 3 אופציות – 2899, 2989, 2998.

נעבור למספרים עם ספרת אלפים 3 – צריך שסכום שאר הספרות יהיה 25. כלומר, צריך להוריד 2 מ-9,9,9. אז האופציות היחידות הן שהספרות יהיו 9,9,7 בסדר כלשהו, או 9,8,8. בכל אחד מהמקרים, יש 3 דרכים לסדר אותן, כלומר סך הכול יש 6 מספרים עם ספרת אלפים 3 – 3799, 3898, ..., 3997.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-1

שלב א'

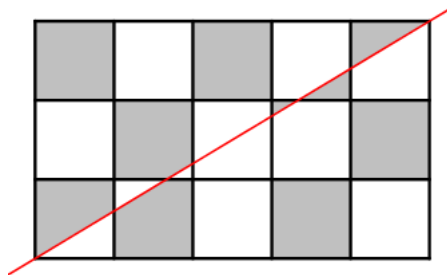
עד כה, יש לנו $1 + 3 + 6 = 10$ מספרים עם סכום ספרות 28. נמשיך הלאה, כי אנחנו רוצים למצוא את ה-24.

אם ספרת האלפים היא 4, סכום הספרות האחרות צריך להיות 24. כלומר, צריך בסך הכול להפחית 3 מ-9,9,9. יש כמה אופציות – הספרות צריכות להיות 9,9,6 או 9,7,8 או 8,8,8, בסדר כלשהו. במקרה הראשון, יש 3 דרכים לסדר אותם. במקרה השני, יש 6 דרכים – 987, 978, 897, 879, 798, 789. כלומר, סך הכול, יש $10 = 1 + 3 + 6$ מספרים תלת ספרתיים עם סכום ספרות 24, כלומר יש 10 מספרים שספרת האלפים שלהם היא 4 וסכום הספרות שלהם הוא 28.

אז אנחנו עומדים כעת על $10 + 10 = 20$ מספרים סך הכול.

כלומר, המספר ה-24 יהיה איזשהו מספר שספרת האלפים שלו היא 5. אז נצטרך הפעם לעבור עליהם באמת, ולא רק לספור אותם. סכום הספרות האחרות צריך להיות 23. לכך יש מספר אופציות – 9,9,5 או 9,8,6 או 9,7,7 או 8,7,8. עכשיו אפשר להתחיל לראות מה האופציות הכי קטנות (למשל להסתכל לפי ספרת המאות) – הכי קטן שאפשר זה 5599, אחרי זה 5689, אחרי זה 5698, ואחרי זה 5779. כלומר, 5779 הוא המספר ה-24 בגודלו שסכום הספרות שלו הוא 28. במקרה (או שלא?) זהו גם מספר השנה העברית הנוכחית, ה'תשע"ט.

3. בציור מלבן בגודל 3×5 וישר שחוצה אותו באלכסון. מצאו את השטח המושחר.

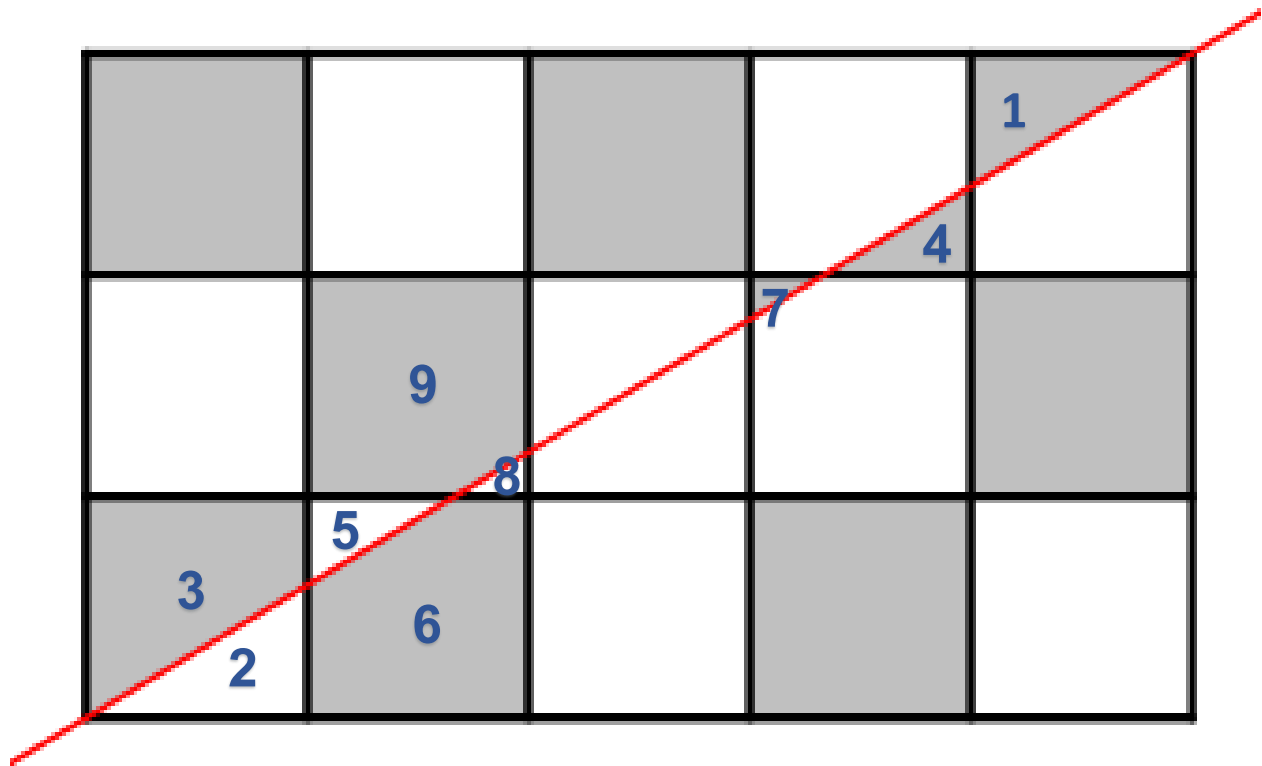


תשובה. 7.

נחפש חלקים צבועים שמשלימים ביחד לריבוע. הציור סימטרי ביחס למרכז המלבן. אז חלקים 1 ו-2 הם בעצם זהים. אבל 2 ו-3 יוצרים ביחד ריבוע. לכן השטח של 1 והשטח של 3 ביחד שווים לשטח של ריבוע אחד. באותו אופן, 4 ו-5 זהה ל-5, ו-6 יוצרים ריבוע. אז 4 ו-6 שווים ביחד בשטחם לשטח ריבוע. גם 7 ו-8 זהה ל-8, ו-9 יוצרים ריבוע, לכן השטחים של 7 ו-9 ביחד שווים לשטח ריבוע. קיבלנו ש-1,3,4,6,7,9 יוצרים ביחד שטח של 3 משבצות. מעבר להם, יש עוד 4 משבצות אפורות שלמות. לכן בסך הכול, השטח הצבוע הוא של 7 משבצות.

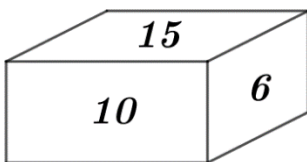
האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב א'



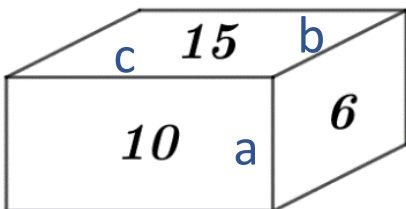
4. נתונה תיבה ששטחי הפאות שלה הם 6, 10 ו-15. מצאו את הנפח שלה.

תשובה. 30.



הסבר. כל פאה של התיבה היא בעצם מלבן. נסמן את האורכים של צלעות התיבה באותיות, כי אנחנו לא יודעים את הערך שלהם – כמו בצורך.

נרשום את מה שאנחנו יודעים – הפאה ששטחה 6 היא מלבן, שצלעותיו באורך a, b . נקבל ש- $a \cdot b = 6$. באותה צורה, הפאה ששטחה 10 היא מלבן שצלעותיו באורך a, c ועל כן $a \cdot c = 10$. לבסוף, הפאה ששטחה 15 גם היא מלבן, וצלעותיו b, c . לכן $b \cdot c = 15$.



מהו נפח התיבה? זה פשוט מכפלת המקצועות, כלומר $a \cdot b \cdot c$.

כלומר, ידוע לנו

$$a \cdot b = 6$$

$$b \cdot c = 15$$

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו


שלב א'

$$c \cdot a = 10$$

ועלינו לגלות את $a \cdot b \cdot c$. אנחנו יכולים להכפיל את כל המשוואות – כלומר, אנחנו יכולים לחשב את $(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (c \cdot a) = 6 \cdot 15 \cdot 10$. אבל מצד שני, אפשר לשנות את סדר האיברים במכפלה –

$$(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (c \cdot a) = a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot a = a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot b \cdot c = (a \cdot b \cdot c)^2$$

כלומר, קיבלנו שנפח התיבה V בריבוע שווה ל- $900 = 6 \cdot 15 \cdot 10$. לכן נפח התיבה הוא 30.

5. מצאו את המספר הדו ספרתי הקטן ביותר  שמקיים:

$$\text{smiley} \times \text{smiley} - \text{smiley} = 600$$


תשובה. 25.

הסבר. חוק הפילוג אומר שאפשר "להוציא מספר מחוץ לסוגריים" – למשל,

$$4 \cdot (3 + 5) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5$$

אז אפשר להשתמש בחוק הפילוג ולקבל

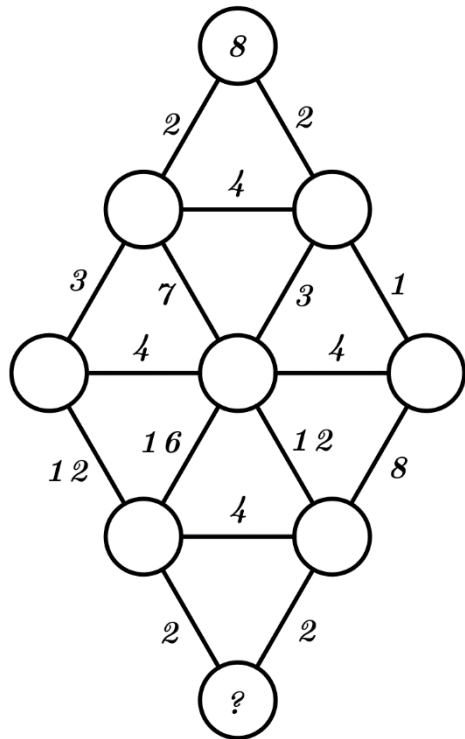
$$\text{smiley} \times \text{smiley} - \text{smiley} = \text{smiley} \times (\text{smiley} - 1) = 600$$

מכאן אנחנו יכולים לראות שיש רק מספר אחד שיעבוד – הרי אם נגדיל את , גם הגורם השני יגדל. לכן אם מתישהו המכפלה היא 600, אם נגדיל את המספרים או נקטין אותם היא כבר תהיה יותר גדולה/קטנה מ-600.

אפשר לחפש ולמצוא שהמספר 25 עובד – $600 = 25 = 625 - 25 = 25 \cdot 25 - 25$. לכן הוא היחיד, ובפרט הכי קטן.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב א'



6. בציור המספרים על הצלעות מסמנים הפרשים בין מספרים בתוך העיגולים. הציבו בתוך העיגולים מספרים חיוביים וגלו מה הוא המספר בעיגול התחתון ביותר.

תשובה. 17.

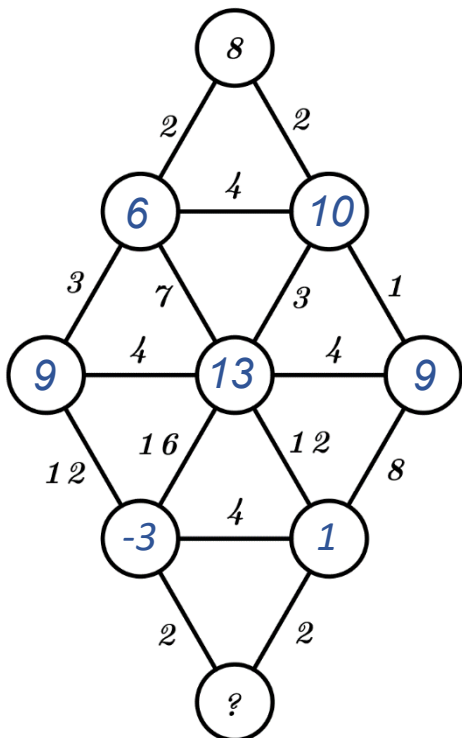
הסבר. שני המספרים העליונים צריכים להיות במרחק 2 מ-8, כלומר 6 או 10. בגלל שההפרש ביניהם 4, זה חייב להיות בדיוק 6 ו-10, בסדר כלשהו.

ננסה לשים את 6 משמאל ו-10 מימין, ולהשלים משם (ראו ציור משמאל). המספר האמצעי בשורה מתחת הוא במרחק 3 מ-10 ובמרחק 7 מ-6, ולכן חייב להיות 13. המספר השמאלי בשורה צריך להיות במרחק 3 מ-6 ו-4 מ-13, ולכן חייב להיות 9. המספר הימני בשורה צריך להיות במרחק 1 מ-10 ו-4 מ-13, ולכן גם הוא חייב להיות 9. כעת, נעבור לשורה הבאה. המספר השמאלי צריך להיות במרחק 12 מ-9 ו-16 מ-13. אבל יש רק מספר אחד כזה, וזה 3-. אבל נתון שכל המספרים חיוביים!

הייתה לנו בחירה בשורה הראשונה, אבל אחריה כל דבר שעשינו היה חייב להיעשות ולא הייתה לנו עוד בחירה, והגענו למספר שלילי. לכן האופציה הזו לא טובה.

כעת ננסה לשים את 6 מימין ו-10 משמאל, ולהשלים משם. (ציור בעמוד הבא).

נסתכל על המספר האמצעי בשורה הבאה - מספר שהוא במרחק 3 מ-6 ו-7 מ-10 יש רק אחד, וזה 3. עכשיו, המספר השמאלי צריך להיות במרחק 3 מ-10 ו-4 מ-3 ולכן חייב להיות 7, והמספר הימני הוא במרחק 1 מ-6 ו-4 מ-3 ולכן חייב להיות 7. לכן השורה הבאה חייבת להיות 7, 3, 7. המספר הימני בשורה מתחת, צריך להיות במרחק 12 מ-3 ובמרחק 8 מ-7, לכן זה 15. המספר השמאלי הוא במרחק 16 מ-3 ו-12 מ-7, לכן חייב להיות 19. הפעם, השורה



האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה-ו

שלב א'

באמת מסתדרת – 15 ו-19 אכן במרחק 4. המספר הבא חייב להיות במרחק 2 משניהם, ולכן בהכרח שווה ל-17.

כלומר, היו שתי אופציות בשורה הראשונה, ורק אחת מהן הביאה אותנו למילוי תקין של הלוח, ולא הייתה לנו אף בחירה בתהליך – לכן זו האופציה היחידה.

