האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה' – ו'
שנת תשע"ט, שלב הגמר

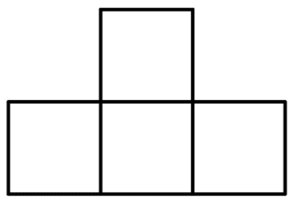
1. הוסיפו סוגריים כדי שהתוצאה תהיה הגדולה ביותר. נמקו את התשובה.

$$10000-1000-100-10-1$$

תשובה. $10000-(1000-100-10-1)=9000+111=9111$

פתרון. כל מספר אחרי פתיחת סוגריים מופיע בביטוי עם פלוס או מינוס – תלוי אם לפני הסוגריים שמכילות אותו יש מספר זוגי או אי-זוגי של מינוסים. העניין הוא שלפני 1000 יכול להיות רק מינוס אחד, אז הוא בכל מקרה מוחסר. הערך המרבי מתקבל כאשר כל המספרים האחרים באים עם פלוס.

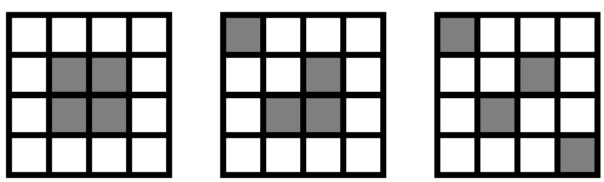
2. ישנה חלקת אדמה שצורתה ריבוע 4×4, המחולקת למשבצות של 1×1. הבונה רוצה לבנות עליה בית שתופס 4 משבצות, שממבט על יראה כך:

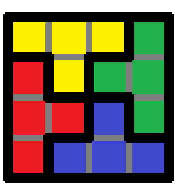


והחפרפרת רוצה להפריע לו. למטרה זו היא יכולה לחפור בורות, שכל אחד מהם תופס משבצת אחת. אי אפשר לבנות על המשבצות שהפכו לבור. מה הוא המספר הקטן ביותר של בורות שצריכה לחפור החפרפרת, כדי שהבונה לא יוכל לבנות את הבית? נמקו!

תשובה. 4.

פתרון. יש מספר שיטות עבור חפרפרת להסתפק ב-4 בורות. להלן 3 דוגמאות (כמובן מספיק להציג דוגמה אחת).





נראה שלא ניתן להסתפק בפחות בורות. נגיד שמראש הבונה מחליט שהוא יבנה אחד מבין 4 הבתים המוצגים בציור (צהוב, ירוק, כחול או אדום). אז חפרפרת חייבת לחפור 4 בורות בשביל למנוע ממנו לבנות כל אחד מהבתים האלה. הבורות שונים כי אין אף משבצת משותפת ל-4 הבתים המתוכננים.

3. אבי, בני וגדי שיחקו "חמור באמצע" – בכל רגע מישהו עומד באמצע, ומנסה לתפוס כדור שהשניים האחרים מתמסרים בו. אם הוא מצליח, אחד מהשניים האחרים מחליף אותו. לאחר המשחק אבי אמר שהוא עמד באמצע 8 פעמים, בני אמר שהוא עמד באמצע 4 פעמים, וגדי שכח כמה פעמים הוא עמד באמצע. הם גם זוכרים שבני הוא האחרון שעמד באמצע. תארו את כל האפשרויות למספר הפעמים שבהן גדי עמד באמצע, ונמקו את תשובתכם.

תשובה. יכול להיות כל מספר מ-3 עד 12 כולל.

פתרון. אחרי כל פעם שגדי היה באמצע, היה מישהו אחר באמצע, כי הוא לא היה אחרון. לכן כמות הפעמים שגדי היה באמצע היא לכל היותר כמות הפעמים שהאחרים היו באמצע, כלומר לכל היותר 12.

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ה' – ו'
שנת תשע"ט, שלב הגמר

הנה דוגמה שזה יכול להיות 12 (לשם קיצור, רושמים רק אות ראשונה בכל שם):

ג א ג א ג א ג א ג א ג א ג א ג א ב ג ב ג ב ג ב

באופן דומה, אפשר להוכיח שלא יכול להיות שאבי היה באמצע יותר פעמים מאשר שני האחרים ביחד (כי אחרי התור שלו הי תור של מישהו אחר). לכן אם אבי היה 8 פעמים, ובני רק 4 פעמים, אז גדי היה באמצע לפחות 4 פעמים.

הנה דוגמה שזה אפשרי:

א ג א ג א ג א ב א ב א ב א ב

נוכיח שיכולים להיות כל דבר באמצע בין 4 ל-12. ברשימה אחרונה נוכל להכניס את גדי פעם נוספת בין כל שני מקומות שאבי ובני מחליפים זה את זה, וכך להגדיל את כמות הפעמים שגדי באמצע ב-1. נוכל גם להוסיף אותו להתחלה. ככה נוכל בשלבים להגיע מהדוגמה שבה גדי היה 4 פעמים לדוגמה שבה הוא היה 12 פעמים, כאשר כל פעם נגדיל את המספר ב-1, אז נקבל את כל המספרים בין 4 ל-12.

4. א. אבי רוצה למצוא 10 מספרים עוקבים שסכומם יתחלק ב-90. האם הוא יצליח? נמקו!
ב. בני רוצה למצוא 11 מספרים עוקבים כך שסכומם יתחלק ב-90. האם הוא יצליח? נמקו!

תשובה. א. לא. ב. כן.

פתרון. א. סכום שני מספרים עוקבים זה מספר אי-זוגי. לכן סכום של 10 מספרים עוקבים, זה סכום של 5 מספרים אי-זוגיים, וזה אי-זוגי. לכן זה לא מתחלק ב-90, כי אם סכום מספרים מתחלק ב-90 הוא בטח גם מתחלק ב-2, כלומר בהכרח מספר זוגי.

ב. הנה דוגמה:

$$90-5 \quad 90-4 \quad 90-3 \quad 90-2 \quad 90-1 \quad 90 \quad 90+1 \quad 90+2 \quad 90+3 \quad 90+4 \quad 90+5$$

אם נסכם את המספרים האלה בשיטת החנוכייה, נקבל שהסכום הוא $90\cdot 11$, כלומר מתחלק ב-90.

5. על הלוח כתוב המספר 6. בכל שלב מותר להוסיף את הספרה 6 לסוף המספר (כך שהיא תהיה ספרת האחדות), או להחליף את המספר בסכום הספרות שלו. אילו מספרים ניתן לקבל בדרך זו? יש לתאר את כל קבוצת המספרים ולהסביר למה אין יותר.

תשובה. כל מספר שמתחלק ב-3.

פתרון. הפתרון מורכב משני חלקים: להראות שכל מספר שמתקבל מתחלק ב-3, ולהראות שכל מספר שמתחלק ב-3 מתקבל.

נתחיל מהדבר הראשון. מספר מתחלק ב-3 אך ורק כאשר סכום ספרותיו מתחלק ב-3. לכן בפעולה מהסוג השני, כשמחליפים מספר בסכום ספרותיו, אם היה מספר שמתחלק ב-3 אז מקבלים שוב מספר שמתחלק ב-3. אם היה מספר שמתחלק ב-3 (הוא וסכום ספרותיו), ומוסיפים ספרה 6 בסופו, אז סכום הספרות גודל ב-6, כלומר עדיין מתחלק ב-3. ובכן, ממספרים שמתחלקים ב-3 עוברים למספרים שמתחלקים ב-3, לכן כל המספרים בתהליך זה מתחלקים ב-3.

נראה שכל מספר המתחלק ב-3 אפשר לקבל. נתחיל במספרים שמתחלקים ב-6, כלומר מספרים מסוג $6n$. ניצור מספר שמורכב מספרות 6, כאשר 6 רשום n פעמים. כעת נהפוך את המספר לסכום ספרותיו וזה $6n$.

נשארו מספרים מהסוג $3+6n$. קל ליצור מספר 66, ולעבור ולסכום ספרותיו 12, ומכאן לסכום ספרותיו שזה 3.

כעת יצרנו 3, ואפשר לצרף אליו n ספרות של 6 בסוף, ואז ניקח את סכום ספרותיו ונקבל $3+6n$.

6. על הלוח כתובים המספרים: $\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3$. בכל מהלך מותר לבחור שני מספרים כלשהם הכתובים על הלוח ולהחליף את כל אחד מהם במכפלתם. האם תוכלו להגיע באופן זה לחמישיית מספרים שסכומם $4\frac{1}{4}$? נמקו!

תשובה. אפשר

פתרון. נראה שיטה לעשות זאת

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 1$$

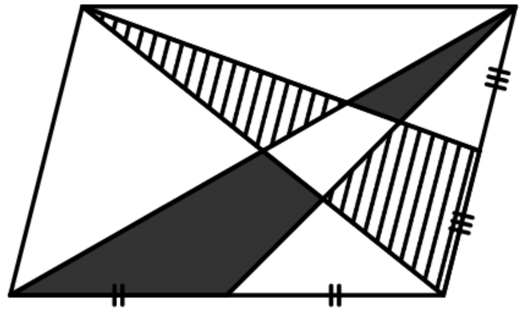
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ 1$$

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ 2,\ 1$$

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2$$

וכעת הסכום הוא $4\frac{1}{4}$.

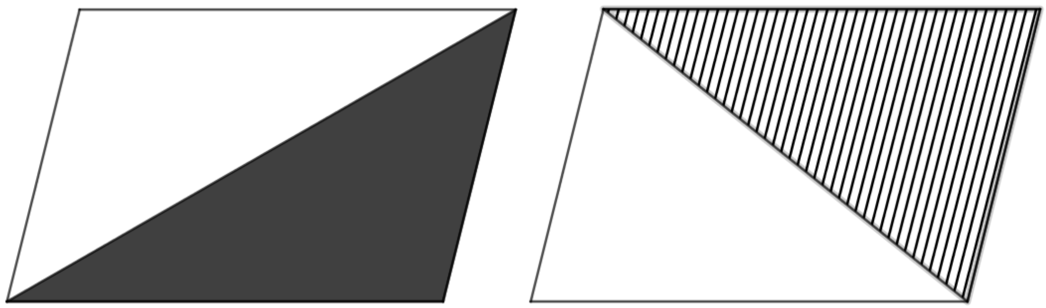
7. בציור מקבילית, שהעבירו בה אלכסונים, וגם חיברו את אמצעי שתי צלעותיה עם קודקודים מנוגדים. איזה שטח גדול יותר: המושחר או המקווקו? נמקו!



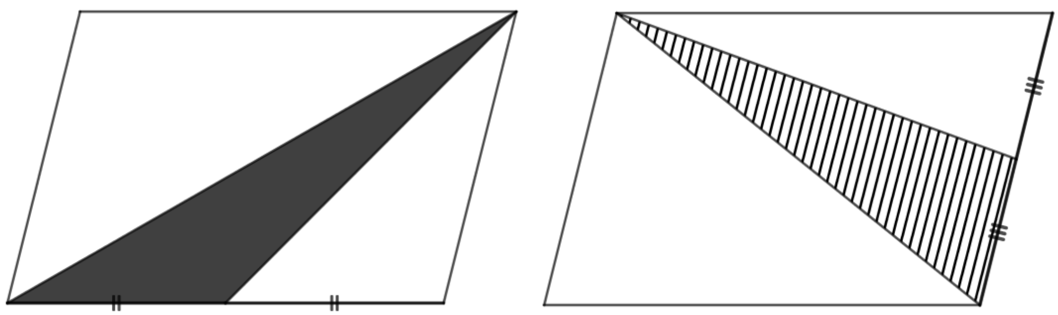
תשובה. שניהם שווים

פתרון. האלכסון מחלק מקבילית לשני חלקים שווים. לכן בשני הציורים הבאים, גם החלק המקווקו וגם המושחר שווים זה לזה

(ולחצי מקבילית).



התיכון מחלק משולש לשני חלקים שווי שטח. לכן בשני הציורים הבאים, גם החלק המקווקו וגם המושחר שווים זה לזה (ולרבע מקבילית).



לכן בתמונה המקורית, אם נוסיף את המרובע באמצע גם לחלק המקווקו וגם לחלק המושחר, נקבל שני משולשים שווי שטח. לכן גם לפני שמוסיפים את השטח המשותף לשני החלקים, החלק המשותף שווה לחלק המושחר.