האולימפיאדה הארצית במתמטיקה לכיתות ג' – ד'
שנת תשע"ט, שלב הגמר

1. תייר מטייל בארץ של שקרנים ודוברי אמת. כל דוברי האמת תמיד אומרים את האמת, וכל השקרנים תמיד משקרים. התייר פוגש ארבעה חברים: אליס, בטי, ג'ון ודונלד, ושואל אותם: "כמה מארבעתכם שקרנים?" אליס עונה: 0, בטי עונה: 1, ג'ון עונה: 2, דונלד עונה: 3. האם ניתן לדעת בוודאות כמה מהם שקרנים? נמקו!

תשובה. לא.

פתרון. יתכן שדונלד הוא דובר האמת היחיד, אז יש 3 שקרנים, והוא אמר את האמת, והאחרים שיקרו. זה מסתדר עם הנתונים.
יתכן גם שכולם שקרנים. אז יש 4 שקרנים, וכולם משקרים. גם זה מסתדר אם הנתונים.
לכן לא ניתן לדעת בוודאות כמה שקרנים יש, כי יש שתי אפשרויות שמסתדרות עם הנתונים.

הערה. קל לראות שאלה שתי האפשרויות היחידות. אכן, מכיוון שהם אומרים דברים שונים, לפחות 3 מהם שקרנים, לכן יש 3 או 4 שקרנים.

2. הוסיפו סוגריים כדי שהתוצאה תהיה הגדולה ביותר. נמקו את התשובה.

$$10000-1000-100-10-1$$

תשובה. $$10000-(1000-100-10-1)=9000+111=9111$$

פתרון. כל מספר אחרי פתיחת סוגריים מופיע בביטוי עם פלוס או מינוס – תלוי אם לפני הסוגריים שמכילות אותו יש מספר זוגי או אי-זוגי של מינוסים. העניין הוא שלפני 1000 יכול להיות רק מינוס אחד, אז הוא בכל מקרה מוחסר. הערך המרבי מתקבל כאשר כל המספרים האחרים באים עם פלוס.

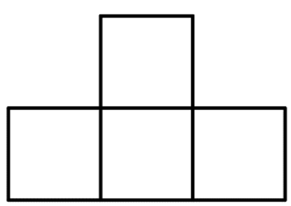
3. אבי, בני וגדי שיחקו "חמור באמצע" – בכל רגע מישהו עומד באמצע, ומנסה לתפוס כדור שהשניים האחרים מתמסרים בו. אם הוא מצליח, אחד מהשניים האחרים מחליף אותו. לאחר המשחק הסתבר שאבי עמד באמצע 8 פעמים, בני – 4 פעמים, וגדי – 13 פעמים. מי היה הראשון ומי האחרון שעמדו באמצע? נמקו!

תשובה. גדי היה גם בהתחלה וגם בסוף.

פתרון. אם גדי לא ראשון, אז לפני כל תור שלו היה תור של אבי או של בני. לכן כמות הפעמים שאבי או בני היה חמור הוא לפחות כמו כמות הפעמים שגדי היה חמור. אבל אבי ובני ביחד היו 12 פעמים, וגדי היה 13 פעמים שזה יותר. לכן גדי היה החמור הראשון.

באופן דומה נוכיח שגדי אחרון. אכן, אם הוא לא אחרון, אז אחרי כל תור של גדי יש תור של אבי או של בני, אבל גדי היה חמור 13 פעמים, ושני האחרים ביחד 12 פעמים.

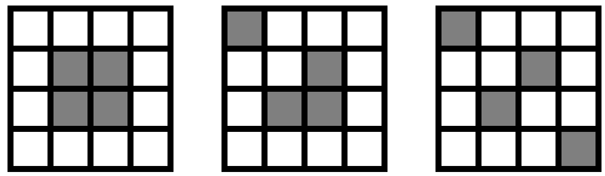
4. ישנה חלקת אדמה שצורתה ריבוע 4×4, המחולקת למשבצות של 1×1. הבונה רוצה לבנות עליה בית שתופס 4 משבצות, שממבט על יראה כך:

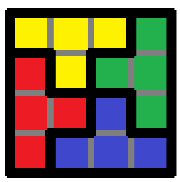


והחפרפרת רוצה להפריע לו. למטרה זו היא יכולה לחפור בורות, שכל אחד מהם תופס משבצת אחת. אי אפשר לבנות על המשבצות שהפכו לבור. מה הוא המספר הקטן ביותר של בורות שצריכה לחפור החפרפרת, כדי שהבונה לא יוכל לבנות את הבית? נמקו!

תשובה. 4.

פתרון. יש מספר שיטות עבור חפרפרת להסתפק ב-4 בורות. להלן 3 דוגמאות (כמובן מספיק להציג דוגמה אחת).





נראה שלא ניתן להסתפק בפחות בורות. נגיד שמראש הבונה מחליט שהוא יבנה אחד מבין 4 הבתים המוצגים בציור (צהוב, ירוק, כחול או אדום). אז הפרפרת חייבת לחפור 4 בורות בשביל למנוע ממנו לבנות כל אחד מהבתים האלה. הבורות שונים כי אין אף משבצת משותפת ל-4 הבתים המתוכננים.

5. איילה, בני, גילי, דני והדס קיבלו מארז סופגניות ובו

10 סופגניות עם ריבת חלב,

8 סופגניות עם חמאת בוטנים,

9 סופגניות עם שוקולד

ו-11 עם ריבת תות.

לכל אחד מהם יש את סוג הסופגניות האהוב עליו.

איילה אכלה 5 סופגניות מהסוג האהוב עליה,

בני אכל 6 סופגניות מהסוג האהוב עליו,

גילי אכלה 7 סופגניות מהסוג האהוב עליה,

דני אכל 8 סופגניות מהסוג האהוב עליו,

והדס אכלה 9 סופגניות מהסוג האהוב עליה.

אחרי זה נשארו להם 3 סופגניות מסוגים שונים. מהו סוג הסופגניות האהוב על כל אחד מהם? נמקו!

תשובה

איילה	בני	גילי	דני	הדס
ריבת תות	ריבת תות	חמאת בוטנים	שוקולד	ריבת חלב

פתרון. שניים מהם חייבים לאכול אותו סוג (הרי יש 5 ילדים ורק 4 סוגים). שניים אלה אכלו לפחות $5+6$ סופגניות, אבל יש רק סוג אחד שיש ממנו 11 סופגניות ולא פחות, וזה ריבת תות. לכן האופציה היחידה היא שאיילה ובני אכלו אותו סוג וזה ריבת תות.

לגבי סופגניות של שלושה סוגים אחרים, מכל סוג חייבת להישאר סופגנייה, הרי נשארו 3 סופגניות מסוגים שונים. לכן נאכלו 9 סופגניות של ריבת חלב – וזה בזכות הדס, 8 סופגניות עם שוקולד – וזה בזכות דני, ו-7 סופגניות עם חמאת בוטנים – וזה בזכות גילי.

6. על הלוח כתוב המספר 6. בכל שלב מותר להוסיף את הספרה 6 לסוף המספר (כך שהיא תהיה ספרת האחדות), או להחליף את המספר בסכום הספרות שלו. אילו מספרים ניתן לקבל בדרך זו? יש לתאר את כל קבוצת המספרים ולהסביר למה אין יותר.

תשובה. כל מספר שמתחלק ב-3.

פתרון. הפתרון מורכב משני חלקים: להראות שכל מספר שמתקבל מתחלק ב-3, ולהראות שכל מספר שמתחלק ב-3 מתקבל.

נתחיל מהדבר הראשון. מספר מתחלק ב-3 אך ורק כאשר סכום ספרותיו מתחלק ב-3. לכן בפעולה מהסוג השני, כשמחליפים מספר בסכום ספרותיו, אם היה מספר שמתחלק ב-3 אז מקבלים שוב מספר שמתחלק ב-3. אם היה מספר

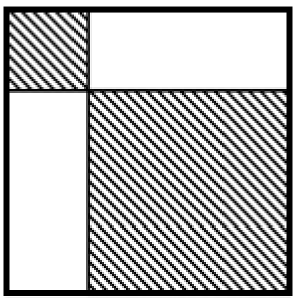
שמתחלק ב-3 (הוא וסכום ספרותיו), ומוסיפים ספרה 6 בסופו, אז סכום הספרות גודל ב-6, כלומר עדיין מתחלק ב-3. ובכן, ממספרים שמתחלקים ב-3 עוברים למספרים שמתחלקים ב-3, לכן כל המספרים בתהליך זה מתחלקים ב-3.

נראה שכל מספר המתחלק ב-3 אכן אפשר לקבל. נתחיל במספרים שמתחלקים ב-6, כלומר מספרים מסוג $6n$. ניצור מספר שמורכב מספרות 6, כאשר 6 רשום n פעמים. כעת נהפוך את המספר לסכום ספרותיו וזה $6n$.

נשארו מספרים מהסוג $3+6n$. קל ליצור מספר 66, ולעבור ולסכום ספרותיו 12, ומכאן לסכום ספרותיו שזה 3.

כעת יצרנו 3, ואפשר לצרף אליו n ספרות של 6 בסוף, ואז ניקח את סכום ספרותיו ונקבל $3+6n$.

7. נתון מלבן ששטחו 13 והיקפו 20. על שתי צלעות סמוכות של המלבן בונים זוג ריבועים, כמו שמתואר בציור. מצאו את סכום השטחים של הריבועים. נמקו!



תשובה. 74.

פתרון. נשלים לריבוע: נצייר מלבן נוסף. אם צלעות של המלבן הם a ו-b, אז צלעות של הריבוע הגדול הם באורך $a+b$. אבל היקף המלבן המקורי הוא $2(a+b)=20$, אז $a+b=10$ ולכן שטח הריבוע הגדול הוא 100. הריבוע הגדול מורכב משני מלבנים, ששטח כל אחד מהם הוא 13, ולכן סכום שטחי שני המלבנים הוא 26. יתר השטח של הריבוע הגדול זה שני הריבועים הקטנים, וזה 74.